



uts | Unidades
Tecnológicas
de Santander
¡Lo hacemos posible!



APUNTES DE CLASE

CURSO DE

MECÁNICA

Diseño de portada:

Imagen generada con <https://www.seaart.ai/>

Se muestra una manzana colgando de una rama, con la Luna en el fondo e iluminadas por la luz del Sol.

Cuenta la anécdota que Isaac Newton se encontraba reposando bajo un árbol de manzanas y, al observar la caída de uno de estos frutos, relacionó este hecho a sus previas meditaciones sobre el movimiento de los astros. Se preguntó entonces, si la fuerza que atraía a la manzana hacia el suelo, sería la misma que mantenía a la Luna orbitando alrededor de la Tierra y a los planetas alrededor del Sol. A partir de esta reflexión, Newton formuló la ley de gravitación universal, la cual describe cómo los cuerpos se atraen mutuamente dependiendo de sus masas y de la distancia que los separa.

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

UNIDADES TECNOLÓGICAS DE SANTANDER

BUCARAMANGA, COLOMBIA

AGOSTO DE 2025

Realizado por:

MSc. HENRY GUTIÉRREZ AMAYA

Docente

	UNIDADES TECNOLÓGICAS DE SANTANDER	DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
	APUNTES CURSO DE MECÁNICA	DOCENTE: HENRY GUTIÉRREZ AMAYA
	2025 - 2	

JUSTIFICACIÓN

El curso de Mecánica:

i. Hace parte del área de formación básica del estudiante uteísta, que se caracteriza por ser un sujeto en condición de aprendizaje que lleva a cabo su formación de manera autónoma, desde una perspectiva de sujeto activo en el proceso didáctico y que propende a impactar de manera efectiva en sus contextos desde el desarrollo de un aprendizaje significativo que contribuya a la consecución de condiciones de bienestar en su contexto.	ii. Tiene la intención de que el estudiante logre construir competencias propuestas en el perfil que busca formar las Unidades Tecnológicas de Santander, un profesional formado integralmente, ético, con pensamiento crítico, que propende a la innovación y con actitud emprendedora que contribuye a la resolución de problemas propios de su disciplina y que aporta a la transformación significativa de su contexto para el alcance de condiciones de bienestar en comunidad. indispensables para la consolidación de saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales, necesarios en la vida profesional.
iii. Tiene una incidencia significativa en la adquisición de competencias tecnológicas, que contribuirán con dicho propósito, pues le permitirá al estudiante consolidar el estudio teórico y experimental, no solo para avanzar en el conocimiento de la naturaleza y comprender el mundo que lo rodea, sino para contribuir en la formación integral, del perfil del estudiante uteísta, que se apropia de una visión emprendedora de la ciencia.	iv. Brinda la orientación sobre conocimientos relacionados con el estudio de la cinemática, la dinámica, la estática, el trabajo mecánico, la potencia mecánica y energía, para facilitar el desarrollo de capacidades mentales de observación, análisis y síntesis, que permiten la construcción de saberes científicos, procedimentales y actitudinales básicos para resolver problemas relacionados con los sistemas mecánicos, adaptar o crear nuevos conocimientos aplicados a diferentes entornos; necesarios en la sociedad actual, la cual exige ciudadanos críticos con la capacidad de ser autónomos.

En consecuencia, el desarrollo del curso de Mecánica, responde a las necesidades detectadas y expuestas en los diferentes planes de desarrollo, a escala nacional y regional. De igual manera, atiende a los avances, actualización y pertinencia del conocimiento, al considerar las principales tendencias disciplinares que caracterizan a esta área de formación.

Para valorar la contribución de este curso dentro de los procesos indisolubles de la enseñanza y el aprendizaje, considerando que los Tecnólogos y los Ingenieros ocupan un lugar importante en el desarrollo de un país y que sus estudios deben tener bases sólidas de calidad y utilidad, además de ser compatibles con la biodiversidad y el cuidado del medio ambiente, se plantea la siguiente pregunta:

¿De qué manera la aplicación de los conceptos de cinemática, dinámica, trabajo, potencia y energía, permiten fomentar el desarrollo de estructuras mentales, para afrontar problemáticas mecánicas reales del nivel tecnológico?

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

Relaciona teorías de la Física Clásica con hechos de su entorno para desarrollar una nueva estructura mental que permita la solución de problemas que impliquen la interpretación, la representación, la argumentación y la toma de decisiones a partir del análisis crítico.

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

RA1: Aplicar algoritmos matemáticos coherentes, de acuerdo a la situación física estudiada, en donde se presente solución a situaciones problemáticas.
 RA2: Articular presaberes y nuevas construcciones de conocimiento, atendiendo necesidades de su entorno.
 RA3: Plantear solución a situaciones problema, en las que se aplique la Mecánica Clásica.

Tomado del documento institucional Plan de curso de Mecánica 11/11/2022.

CONTENIDO		PARCIALES
		El contenido a evaluar en cada corte está sujeto a los avances en los temas durante las clases.
1. CANTIDADES FÍSICAS	• Escalares y vectoriales • Vectores y operaciones con vectores	i. Fecha
2. CINEMÁTICA	• Movimiento rectilíneo: MRU, MRUA • Movimiento parabólico	
3. FUERZA	• Masa • Fuerza, fuerzas de contacto • Leyes de Newton • Aplicaciones: estática y dinámica • Cantidad de movimiento	ii. Fecha
4. TRABAJO Y ENERGÍA	• Trabajo • Energía: Potencial y cinética • Conservación de la energía • Colisiones	iii. Fecha

PORCENTAJES DE LAS EVALUACIONES		
30%	60%	10%
Quices y talleres (y ABPr)	Parcial (y ABPr)	Autoevaluación

BIBLIOGRAFÍA
• Young, H. D., Freedman, R. A., Francis Weston Sears, & Mark Waldo Zemansky. (2018). Física universitaria. Pearson Educación De México. • Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2008). Física para Ciencias E Ingeniería. Cengage Learning Editores. • Ohanian, H. C. (2009). Física para ingeniería y ciencias. • Resnick, R. y Halliday, D. (1997). Física. Tomo I. Editorial C.E.C.S.A. México • Alonso, M. y Finn, E. (1995). Física. 1ª Ed. Editorial Pearson. México. • W Bauer, & Westfall, G. D. (2013). <i>University physics with modern physics. Volume 1, Chapters 1-20.</i> McGraw-Hill. • Wilson, J. D., & Buffa, A. J. (2002). <i>Física.</i> Pearson Educación. • Thomas Andrew Moore. (2003). <i>Six ideas that shaped physics.</i>

RECOMENDACIONES	
Repaso de temas de matemáticas:	Repaso de temas de física de educación básica secundaria:
• Aritmética y operaciones • Despejes • Álgebra • Sistemas de ecuaciones • Trigonometría y geometría • Funciones y gráficas • Conceptos de cálculo	• Notación científica y prefijos • Análisis dimensional • Conversión de unidades • Plano cartesiano • Vectores, propiedades y operaciones • Movimiento, leyes de Newton, trabajo y energía. • Manejo de la calculadora

ACTIVIDAD PRELIMINAR: Ingresar al enlace <https://acortar.link/iQGvuc> y desarrollar las actividades para revisar sus fortalezas y aspectos por mejorar, en cuanto al manejo de las bases matemáticas necesarias para este curso.

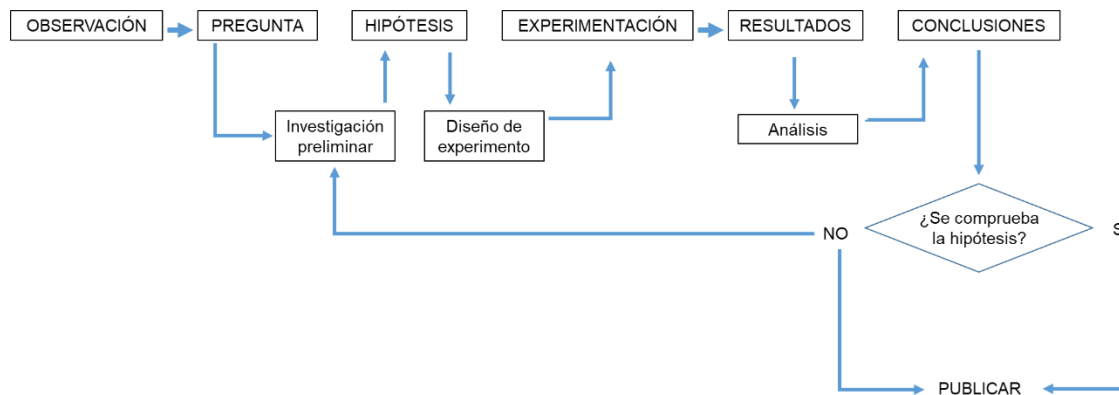
INTRODUCCIÓN	5
1. CANTIDADES FÍSICAS	8
Cantidades escalares y vectoriales.	8
VECTORES	9
2. CINEMÁTICA	18
MOVIMIENTO RECTILÍNEO	19
MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME ACELERADO (MRUA)	20
MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)	22
MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS BAJO INFLUENCIA DE LA GRAVEDAD	29
CAÍDA LIBRE Y LANZAMIENTO VERTICAL	29
MOVIMIENTO CURVILÍNEO	33
MOVIMIENTO PARABÓLICO	33
3. DINÁMICA	43
CONCEPTOS FUNDAMENTALES	43
TIPOS DE FUERZAS	43
LEYES DE NEWTON	45
APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON	52
4. TRABAJO Y ENERGÍA	65
TRABAJO	65
FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS	73
ENERGÍA POTENCIAL	75
ENERGÍA CINÉTICA	76
ENERGÍA MECÁNICA	77
POTENCIA	89
5. COLISIONES	90
COLISIONES PERFECTAMENTE ELÁSTICAS	91
COLISIONES PERFECTAMENTE INELÁSTICAS	91
ANEXO	94
MOVIMIENTO CIRCULAR	95
INTERACCIÓN GRAVITACIONAL	97

INTRODUCCIÓN

LA CIENCIA

La palabra "ciencia" proviene del latín "scientia", que significa "conocimiento" o "saber". Desde sus orígenes, el ser humano ha habitado un mundo que le ha despertado una innata curiosidad por comprender los fenómenos que lo rodean: desde el ciclo del día y la noche, la estabilidad de enormes estructuras, los movimientos tanto de los cuerpos en su entorno como de los astros en el firmamento. Esta curiosidad no es un mero capricho; es un instinto profundamente arraigado en nuestra propia evolución, que nos impulsó a explorar y adaptarnos a nuestro entorno para sobrevivir. La satisfacción que obtenemos al desentrañar un misterio, al aprender algo nuevo, nos ha mantenido en una búsqueda constante de conocimiento.

Este asombro inicial, lejos de ser una mera contemplación, condujo con el tiempo a la necesidad de encontrar respuestas fiables y contrastables, y lentamente comenzó a gestarse el método científico. Este no surgió de un día para otro, sino que evoluciona como resultado del esfuerzo colectivo por desentrañar los misterios del universo, pasando de explicaciones míticas a un enfoque basado en la evidencia, la experimentación y la lógica rigurosa. La curiosidad que nos define, la misma que nos llevó a cuestionar nuestro lugar en el cosmos, es la chispa que encendió el motor de las ciencias.

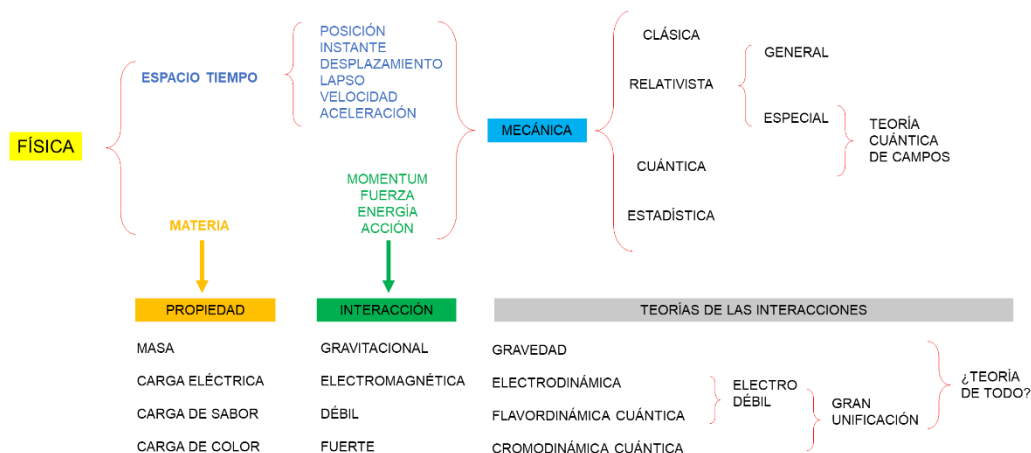


Esquema del método científico

LA FÍSICA

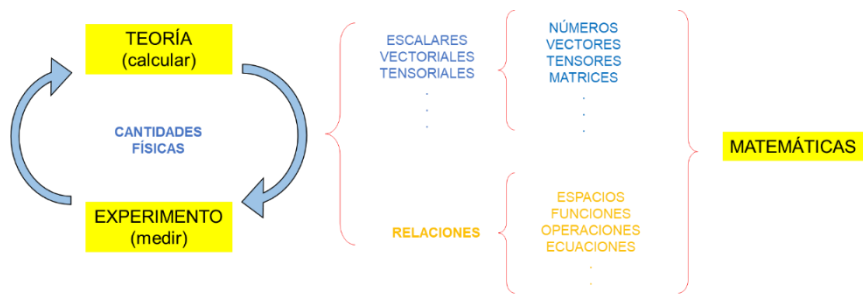
Entre estas ciencias se encuentra la Física. La palabra "física" proviene del griego antiguo "physike" (φυσική), que significa "naturaleza" o "relativo a la naturaleza". Este término, a su vez, deriva de "physis" (φύσις), que significa "origen", "naturaleza" o "propiedad".

La física es la ciencia que estudia la materia y sus interacciones en el espacio y el tiempo.



Mapa general de la física actual

Para describir las propiedades de la materia y sus respectivas interacciones, es necesario cuantificarlas, que sean descritas en términos de cantidades que puedan ser medidas y calculadas. Es así como la matemática juega un papel muy importante al ser esta la ciencia en la cual el concepto de cantidad, su representación, sus operaciones y relaciones se desarrollan con rigor. Los conceptos físicos que surgen de la abstracción al analizar un fenómeno, requieren de ser definidos de manera precisa, mediante las diferentes relaciones matemáticas entre las cantidades físicas, se elaboran modelos que permiten explicar y predecir el comportamiento de un sistema.



La matemática es tanto una herramienta como un lenguaje

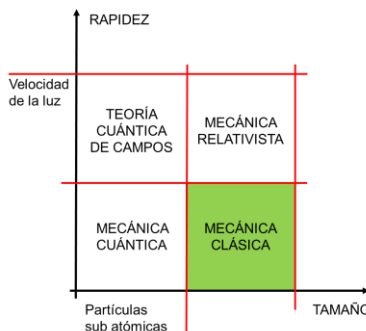
LA MECÁNICA

Un área importante de la Física es la Mecánica. La palabra "mecánica" proviene del latín tardío "mechanica", que a su vez deriva del griego "mēkhaniké", que significa "relativo a las máquinas".

Actualmente, se concibe a la Mecánica como el área de la física donde se definen y construyen los conceptos a partir de los cuales se estudian las interacciones que surgen en la materia según sus propiedades. No se restringe solamente a las máquinas, sino que va más allá, a la abstracción de conceptos más fundamentales como el espacio, el tiempo, el movimiento y la formulación de las interacciones en términos de las fuerzas y las energías.

¿Qué vamos a estudiar en este curso?

En este curso abordaremos el estudio de la mecánica clásica, en la cual se definen los conceptos fundamentales que se refieren a la ubicación espacial de los objetos y su evolución en el tiempo, es decir el movimiento (posición, velocidad y aceleración) y las cantidades que cuantifican las interacciones (momentum, fuerza y energía). En el marco de la mecánica clásica se asume que el tiempo es absoluto para todos los observadores, que el espacio cumple con los axiomas de la geometría euclidiana y que las interacciones y el consecuente estado de movimiento están relacionadas de manera determinista. El desarrollo científico y tecnológico de los últimos siglos tales como la comprensión del movimiento de los astros, máquinas, estructuras, etc. se dio gracias en parte a la mecánica clásica. Incluso hoy en día, las teorías basadas en las leyes de la mecánica clásica son una excelente y útil aproximación al estudio del movimiento y las interacciones de objetos en el mundo macroscópico cotidiano.



Límites de la mecánica clásica: las suposiciones acerca del espacio, el tiempo, el movimiento y las interacciones del marco de la mecánica clásica no son estrictamente compatibles cuando se aplican al estudio de sistemas a escalas nucleares y atómicas (quarks, núcleos atómicos, moléculas, etc), escalas cosmológicas (evolución y estructura del universo a gran escala), objetos que se mueven a velocidades cercanas a las de la luz en el vacío (rayos cósmicos, aceleradores de partículas, etc.) y objetos astrofísicos (estrellas supermasivas, cuásares o agujeros negros). Sin embargo, la mecánica clásica es el punto de partida para formar las bases conceptuales y matemáticas rigurosas que permitan abordar luego el estudio de estos temas más complejos.

¿Cómo estudiar física?

Los libros de texto de física suelen dedicar una sección al inicio (nota al estudiante, prefacio, etc.) en la cual dan indicaciones tanto para usar el libro propiamente como para abordar en general el estudio de los temas de la física. A continuación, algunas sugerencias:

Al estudiante cómo triunfar en física si se intenta de verdad:

Young, H. D., Francis Weston Sears, Mark Waldo Zemansky, & Freedman, R. A. (2009). *Sears-Zemansky física universitaria*. Addison-Wesley.

Young, H. D., Freedman, R. A., A Lewis Ford, & Al, E. (2013). *Física universitaria*. Pearson.

Al estudiante:

Serway, R. A., Vuille, C., Elizabeth, A., Ernesto Filio López, & Elibro.net. (2013). *Fundamentos de física*. vol. 1. Cengage Learning.

Nota de los autores:

Wolfgang Bauer, Westfall, G. D., Jorge Álvarez Díaz, & Al, E. (2011). *Física para ingeniería y ciencias*. McGraw-Hill/Interamericana.

➤ RECURSOS COMPLEMENTARIOS

Walliman, D. (s/f). MAPA DE LA FÍSICA. <https://i2.wp.com/molasaber.files.wordpress.com/2016/12/dominic-walliman-espac3b1ol.jpg>

Walliman, D. (s/f-b). THE MAP OF PHYSICS. <https://www.youtube.com/watch?v=ZihywtixUYo>

El Traductor de Ingeniería, D. P. (s/f). Te Muestro como Pienso la FÍSICA. https://youtu.be/HD0Hv9A3md4?si=Lu1AQAb_mE9Agmnf

Voltio, D. un, & Santaolalla, J. (s/f). 10 COSAS FUNDAMENTALES que tienes que saber sobre Física. <https://youtu.be/lqC8hc6a8rM?si=WKN4XOWyCBpZtuWv>

QuantumFracture. (s/f). El Método Científico No Existe. https://youtu.be/9mn_apO2DKk?si=xYj1n3L_d_8iGxN8

1. CANTIDADES FÍSICAS

La física tiene como propósito describir los fenómenos naturales. Para ello define los elementos principales de dichos fenómenos, las relaciones entre estos y sus propiedades más relevantes. De tales propiedades, *aquellas que pueden expresarse con un número y unas unidades, que permitan definir una relación de transición y por ende un patrón de medida para comparación, se dice que son cantidades físicas.*

Ejemplo: Un bloque de panela de color marrón, tiene una masa de 500 g, 2 cm de espesor, 10 cm de longitud y 8 cm de ancho, un olor y un sabor dulce. De estas propiedades, el color (en el sentido sensorial), el olor y el sabor no son cantidades físicas ya que actualmente no se les puede asignar un número y unas unidades que las cuantifiquen y permitan hacer una comparación con un valor numérico de manera precisa y objetiva. La masa y las dimensiones espaciales sí son cantidades físicas ya que se les puede asignar un valor numérico y se pueden medir y comparar mediante una báscula o una regla respectivamente, por ejemplo.

Cantidades escalares y vectoriales.

En física encontramos dos tipos de cantidades:

Cantidades escalares:

Son aquellas que quedan completamente definidas a partir de un número y unas unidades de medida.

Ejemplo: Distancia (2 m), tiempo (90 min), rapidez (5 m/s), masa (5 kg), etc.

Cantidades vectoriales:

Son aquellas que requieren de un número, unas unidades de medida y además especificar una orientación en el espacio para quedar completamente definidas.

Ejemplo: Desplazamiento (2 m hacia el nor-oeste), velocidad (5 m/s hacia sur-oriente), fuerza (10 N hacia arriba), etc.

Operaciones con cantidades físicas

Las cantidades escalares se expresan mediante números reales y obedecen las reglas aritméticas de operaciones como la suma, el producto, la potenciación, la radicación, etc.

Las cantidades vectoriales se expresan mediante vectores y cumplen con las operaciones de suma, resta y los diferentes productos que se realizan con los vectores.

A continuación, nos centraremos en los vectores, sus propiedades y sus operaciones.

VECTORES

Los vectores son entidades matemáticas que tienen un valor y una orientación en el espacio, es decir, poseen magnitud o módulo, dirección, sentido y unidades.

La notación escrita para representar los vectores es una letra con una flecha en la parte superior, por ejemplo $\vec{A}$ se lee como “vector A”. En ocasiones suele denotarse mediante negrita: $\mathbf{A} = \vec{A}$.

Gráficamente los vectores se representan como segmentos de recta dirigidos que constan de una cola y una punta.

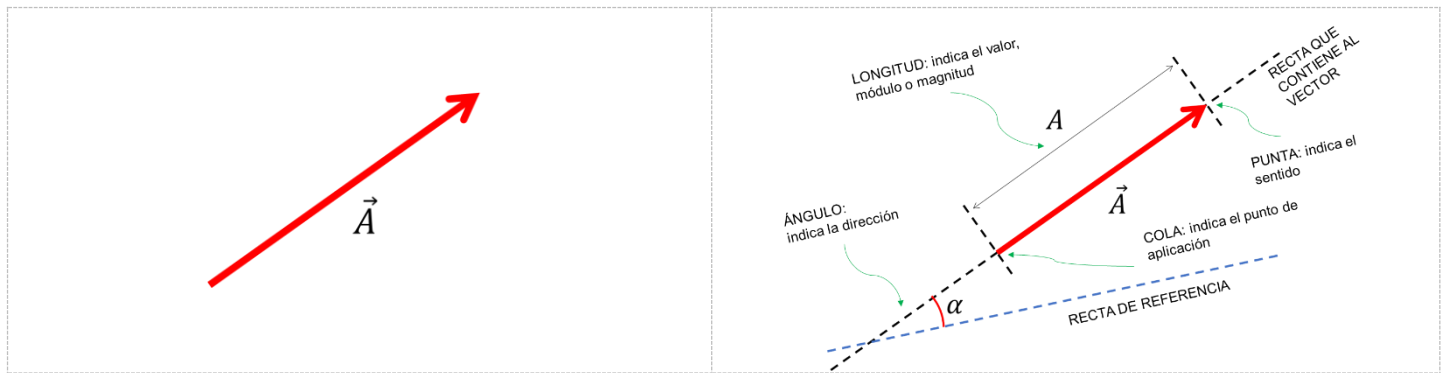
Propiedades de los vectores:

Magnitud o módulo: es proporcional a la longitud del segmento de recta desde la cola hasta la punta del vector e indica el valor de la cantidad vectorial. El módulo o magnitud de $\vec{A}$ se representa como $|\vec{A}|$ o simplemente A .

Dirección: Se indica mediante el ángulo que forma la recta que contiene al vector respecto a una recta de referencia.

Sentido: La recta que contiene al vector se puede recorrer en dos sentidos. Se dibuja una punta de flecha en un extremo del segmento de recta para especificar el sentido en que está orientada la cantidad vectorial.

Unidades: Cuando el vector representa una cantidad vectorial se especifican las unidades de medida en las que está expresada.



Operaciones con vectores

- Igualdad de vectores

Si dos vectores tienen la misma magnitud, la misma dirección y el mismo sentido, entonces se dice que tales dos vectores son iguales. En la figura: $\vec{B} = \vec{A}$. Cuando estos vectores representan cantidades físicas, para que sean iguales deben además poseer las mismas unidades de medida.

- Vectores opuestos

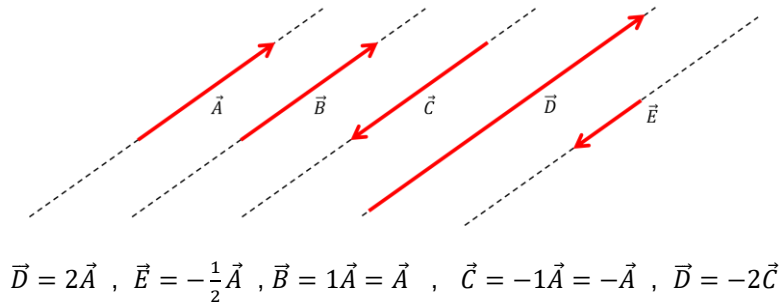
Si dos vectores tienen la misma magnitud, la misma dirección y los sentidos contrarios, entonces se dice que tales vectores son opuestos. En la figura: $\vec{C} = -\vec{A}$

- Producto por escalar

Es la operación que consiste en multiplicar un vector con un número real. Se expresa como $a\vec{A}$ donde a es un escalar, es decir un número real y $\vec{A}$ es un vector. El resultado es un vector que conserva la misma dirección, pero cuyo módulo y sentido pueden ser diferentes al del vector original.

Ejemplo. En la figura, dado el vector $\vec{A}$, represente gráficamente el resultado de los siguientes productos escalares:

$$2\vec{A} \quad ; \quad -\frac{1}{2}\vec{A} \quad ; \quad -\vec{A} \quad ; \quad -2\vec{A}$$



- Vector unitario: es un vector cuya magnitud es 1 y no posee unidades. Se denota con una letra con un "hat" $\hat{}$ en la parte superior

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

Cualquier vector se puede expresar en términos de su magnitud y el vector unitario asociado a su dirección y sentido, por ejemplo $\vec{A} = A \hat{A}$.

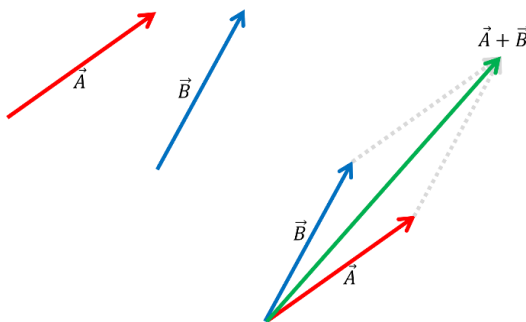
- Suma y resta de vectores

La suma de vectores se puede realizar de manera gráfica y de manera analítica. Se abordará acá la suma (y resta) de manera gráfica. La forma analítica se realiza planteando los vectores en el plano o el espacio cartesiano y se verá más adelante.

De manera gráfica, la suma de dos vectores se realiza siguiendo una de las dos reglas:

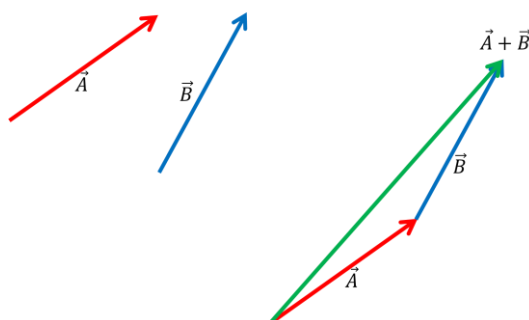
La regla del paralelogramo, llamada coloquialmente cola con cola, y la regla del triángulo llamada punta con cola.

Por la regla del paralelogramo, se trasladan los vectores sin modificar sus propiedades, de manera que sus colas coincidan. Luego se proyectan los vectores formando el paralelogramo. El vector suma es el que va desde las colas hasta la intersección de las proyecciones.



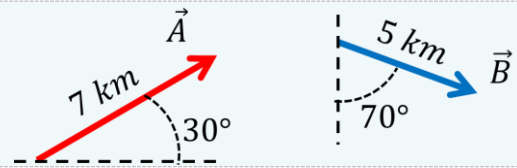
Suma de dos vectores: regla del paralelogramo.

Por la regla del triángulo, se trasladan los dos vectores sin modificar sus propiedades, de manera que la punta de un vector coincida con la cola del otro. El vector que resulta de esta operación es aquel que está dirigido de la cola del primer vector hasta la punta del segundo vector.



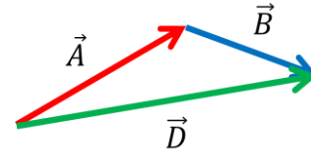
Suma de dos vectores: regla del triángulo.

Ejemplo: Un excursionista se mueve en un terreno llano y realiza los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dados por los vectores mostrados en la figura. Determine el desplazamiento total.



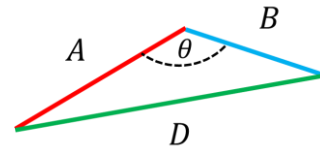
Los desplazamientos son cantidades vectoriales, por lo tanto, para hallar el desplazamiento total $\vec{D}$ se debe realizar la suma vectorial.

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B}$$

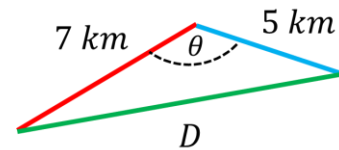


Observamos que se forma un triángulo, del cual conocemos la longitud de dos de los lados, que son las magnitudes A y B de los vectores dados. Para hallar el lado D requerimos el ángulo opuesto θ y luego aplicar la ley del coseno:

$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$



$$D^2 = 7^2 + 5^2 - 2 * 7 * 5\cos\theta$$



El ángulo θ se puede expresar como la suma del ángulo de 70° y el ángulo δ : $\theta = 70^\circ + \delta$. De la figura se tiene a su vez que $\delta + 30 = 90^\circ$. Por lo tanto:

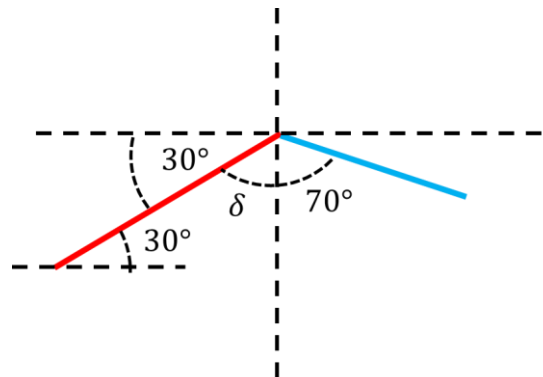
$$\delta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\theta = 70^\circ + 60^\circ = 130^\circ$$

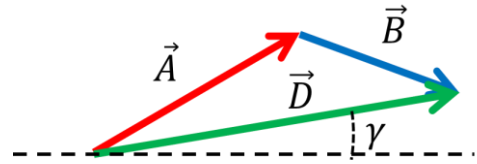
$$D^2 = 7^2 + 5^2 - 2 * 7 * 5\cos(130^\circ)$$

$$D^2 \approx 118,9951$$

$$D \approx 10,9085 \text{ km}$$

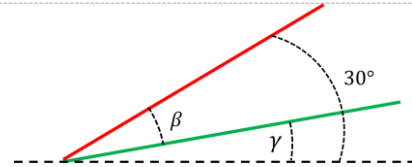


Para especificar la dirección del desplazamiento resultante se determina el ángulo γ que forma $\vec{D}$ con respecto a la línea horizontal.



De la figura, se observa que

$$\beta + \gamma = 30^\circ$$



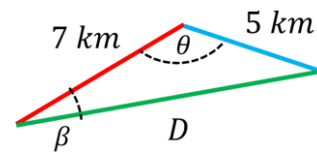
El ángulo β se puede determinar a partir de la ley de los senos ya que se conocen los lados B y D y el ángulo θ .

$$\frac{D}{\sin \theta} = \frac{B}{\sin \beta}$$

$$\frac{10,9085}{\sin 130^\circ} = \frac{5}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{5}{10,9085} * \sin 130^\circ \approx 0,3511$$

$$\beta = \arcsen 0,3511 \approx 20,55^\circ$$

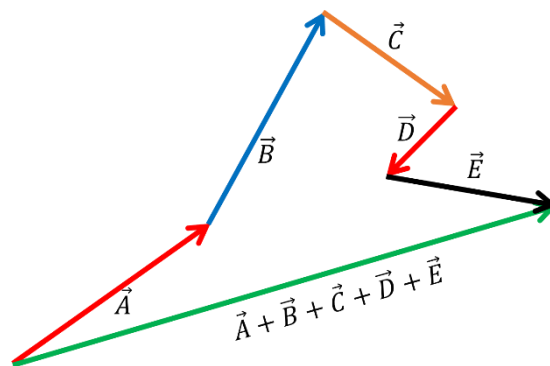


Se tiene entonces que

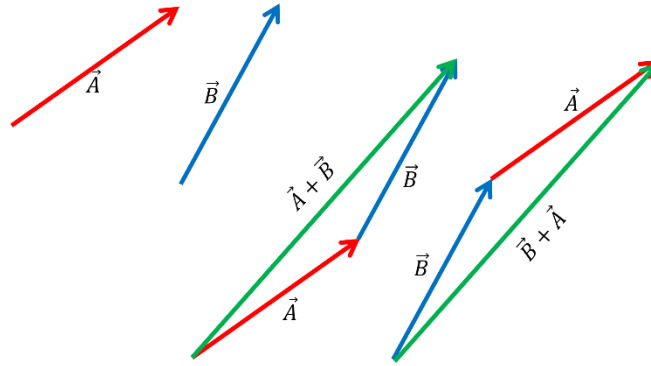
$$\gamma = 30^\circ - 20,55^\circ \approx 9,45^\circ$$

El desplazamiento resultante $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B}$ es entonces un vector de 10,9085 km de magnitud y una dirección de $9,45^\circ$ respecto a la línea horizontal.

La regla del triángulo se puede generalizar para sumar más de dos vectores, en cuyo caso pasa a formarse un polígono.

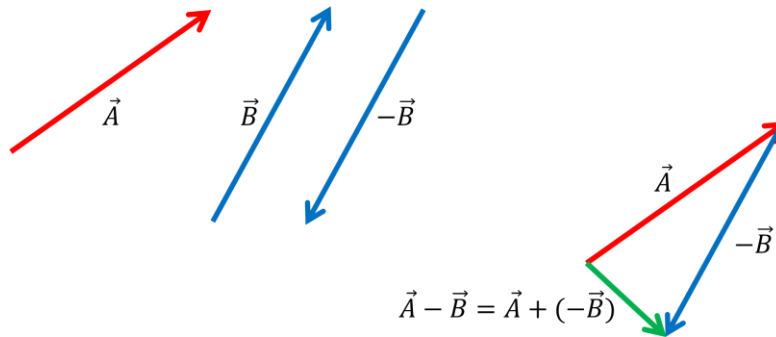


La suma de vectores cumple con la propiedad conmutativa, es decir, el resultado de la suma de dos o más vectores no depende del orden en que se sumen: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

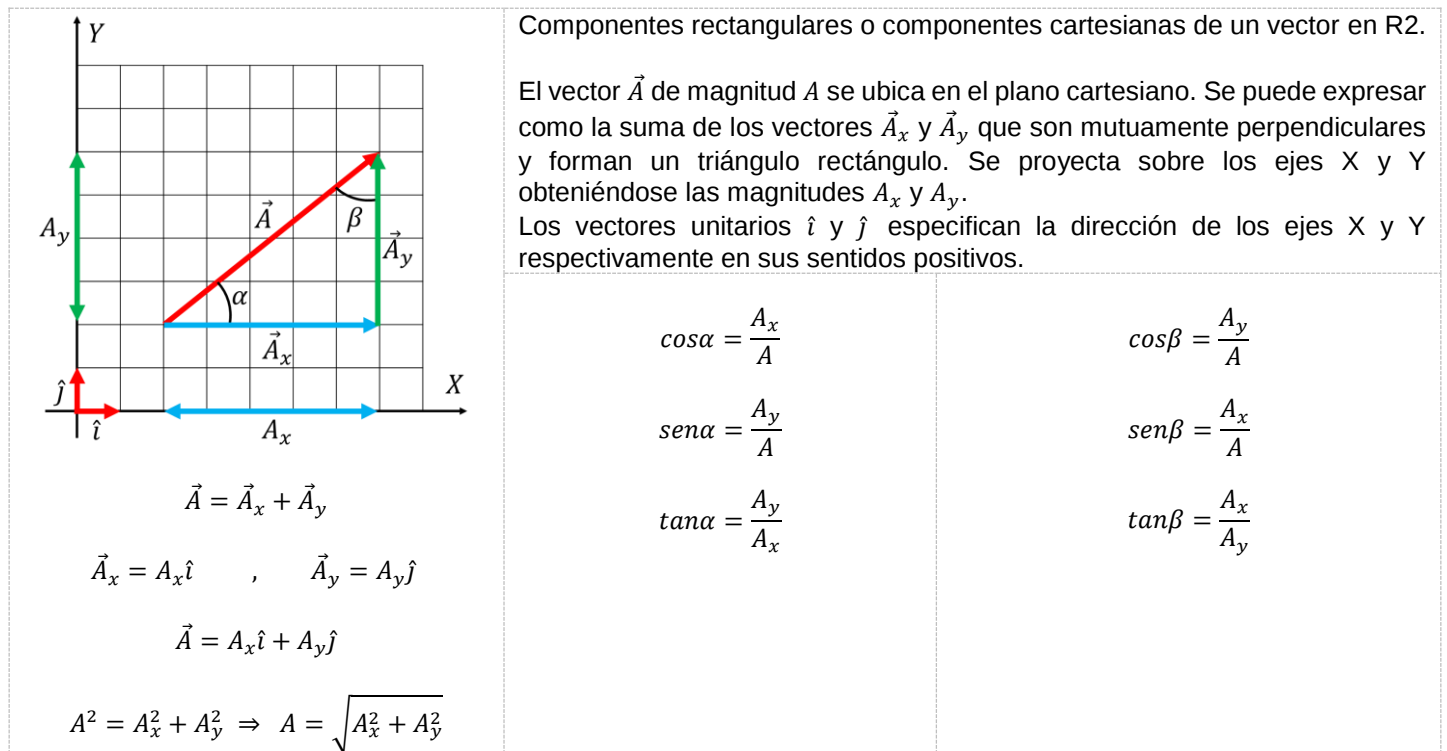


Para realizar la resta de vectores, se siguen las mismas reglas de la suma, haciendo la operación de suma con el vector opuesto.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



VECTORES EN EL PLANO CARTESIANO R2



Las operaciones con vectores, en términos de las componentes rectangulares, quedan expresadas de la siguiente manera:

Sean dos vectores $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$ y $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$

Igualdad de vectores:

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow A_x = B_x \wedge A_y = B_y$$

Vectores opuestos:

$$\vec{A} = -\vec{B} \Leftrightarrow A_x = -B_x \wedge A_y = -B_y$$

Producto por escalar:

$$a\vec{A} = a(A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) = aA_x \hat{i} + aA_y \hat{j}$$

Vector unitario:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x \hat{i} + A_y \hat{j}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

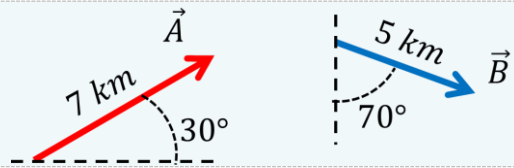
Suma de vectores:

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j}) \\ &= (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} \end{aligned}$$

Resta de vectores:

$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) - (B_x \hat{i} + B_y \hat{j}) \\ &= (A_x - B_x) \hat{i} + (A_y - B_y) \hat{j} \end{aligned}$$

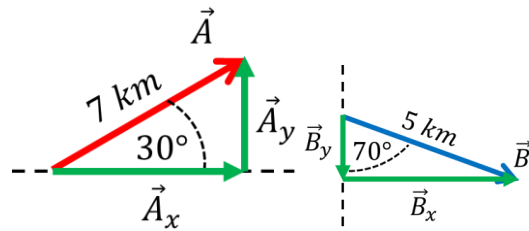
Ejemplo: Un excursionista se mueve en un terreno llano y realiza los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dados por los vectores mostrados en la figura. Determine el desplazamiento total.



Los desplazamientos son cantidades vectoriales, por lo tanto, para hallar el desplazamiento total $\vec{D}$ se debe realizar la suma vectorial.

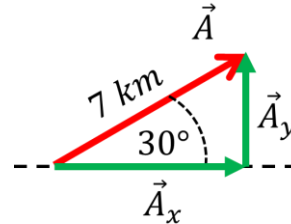
$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B}$$

Se plantean entonces las componentes cartesianas de los vectores:



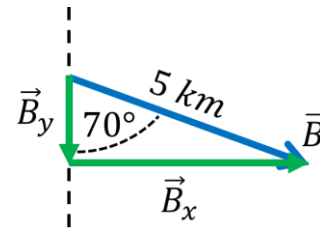
$$\cos 30^\circ = \frac{A_x}{A} \Rightarrow A_x = 7 \cos 30^\circ \approx 6,0622 \text{ km}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{A_y}{A} \Rightarrow A_y = 7 \sin 30^\circ \approx 3,5 \text{ km}$$

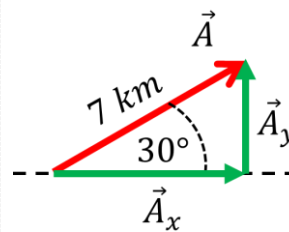


$$\sin 70^\circ = \frac{B_x}{B} \Rightarrow B_x = 5 \sin 70^\circ \approx 4,6985 \text{ km}$$

$$\cos 70^\circ = \frac{B_y}{B} \Rightarrow B_y = 5 \cos 70^\circ \approx 1,7101 \text{ km}$$

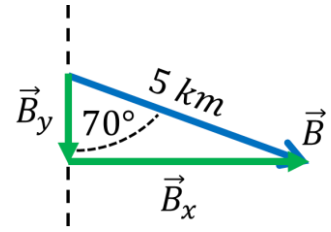


Los vectores que expresan estos desplazamientos en términos de sus componentes rectangulares son:



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$\vec{A} = 6,0622 \hat{i} + 3,5 \hat{j} \text{ km}$$



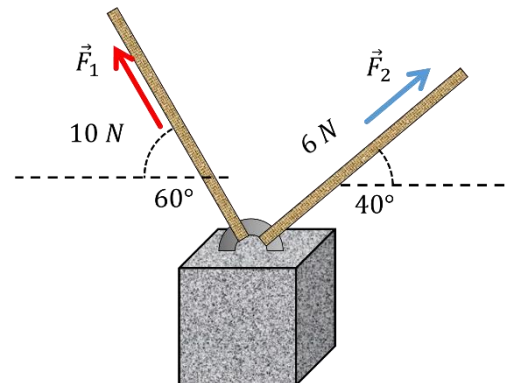
$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

$$\vec{B} = 4,6985 \hat{i} + (-1,7101) \hat{j} \text{ km}$$

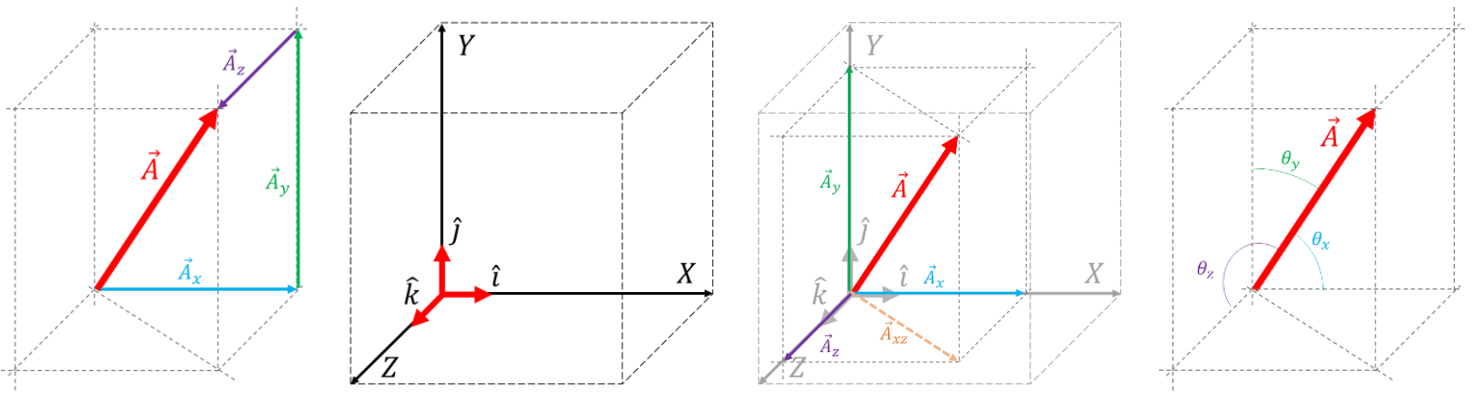
La suma de estos vectores da entonces:	$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B}$ $= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$ $= (6,0622 + 4,6985)\hat{i} + (3,5 + (-1,7101))\hat{j}$ $\Rightarrow \vec{D} = (10,7607)\hat{i} + (1,7899)\hat{j} \text{ km}$
La magnitud de este vector es:	$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}$ $D = \sqrt{10,7607^2 + 1,7899^2} \approx 10,9085 \text{ km}$
La dirección de este vector con respecto al eje x positivo es:	$\tan \gamma = \frac{D_y}{D_x}$ $\tan \gamma = \frac{1,7899}{10,7607}$ $\gamma = \arctan \frac{1,7899}{10,7607} \approx 9,4439^\circ$
Comparando con el método gráfico, se verifica que los resultados se corresponden con los del método analítico.	

Ejercicio:

Mediante un sistema de cuerdas, se aplican las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ con el fin de levantar un bloque de concreto. Las magnitudes y direcciones de las fuerzas se muestran en la figura. Determine la fuerza resultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Desarrolle el ejercicio por el método gráfico (polígono) y por el método analítico (componentes rectangulares).



VECTORES EN EL ESPACIO CARTESIANO R3



Componentes rectangulares o componentes cartesianas de un vector en R3.

El vector $\vec{A}$ de magnitud A se ubica en el espacio cartesiano. Se puede expresar como la suma de los vectores $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$ y $\vec{A}_z$ que son mutuamente perpendiculares y forman un paralelepípedo rectangular. Se proyecta sobre los ejes X, Y y Z obteniéndose las magnitudes A_x , A_y y A_z .

Los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ especifican la dirección de los ejes X, Y y Z respectivamente en sus sentidos positivos.

$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$ $\vec{A}_x = A_x \hat{i} \quad , \quad \vec{A}_y = A_y \hat{j} \quad , \quad \vec{A}_z = A_z \hat{k}$ $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$	Para especificar la dirección, se definen los cosenos directores: $\cos \theta_x = \frac{A_x}{A}$ $\cos \theta_y = \frac{A_y}{A}$ $\cos \theta_z = \frac{A_z}{A}$
--	--

➤ RECURSOS COMPLEMENTARIOS

- Visualización y operaciones con vectores en 2D:

Adición de Vectores. (2024). PhET. <https://phet.colorado.edu/es/simulations/vector-addition>

u/karenan. (2025). applet vectores. GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/ce3R8YT4>

oPhysics. (n.d.). Ophysics.com. <https://ophysics.com/k2.html>

- Visualización de vectores en 3D:

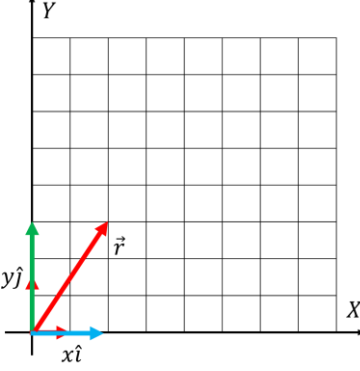
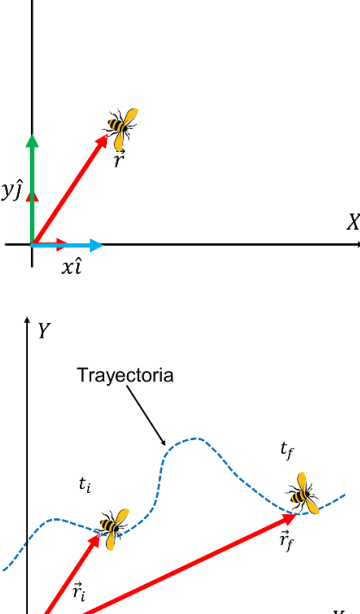
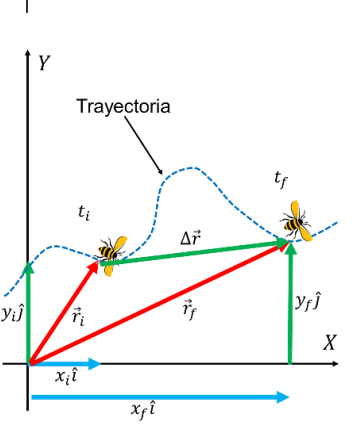
u/fmartinezgarcia. (2025). Vector 3D. GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/WSCD55fw>

u/computergraphicsforall. (2025). Vector 3D. GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/qn5pi9kq>

u/fernrodolfo. (2025). Vectors in 3D. GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/bDFcHaUt>

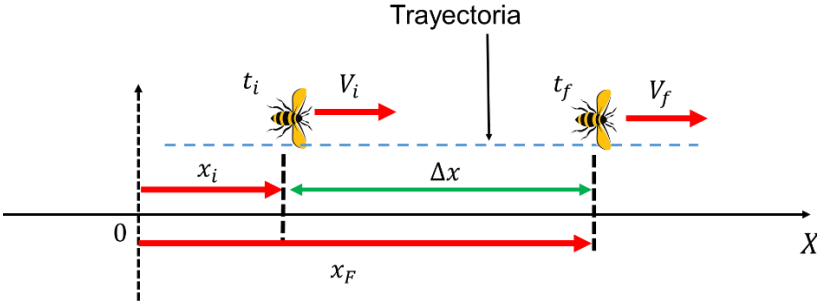
2. CINEMÁTICA

Estudia el movimiento a partir de la posición, la trayectoria, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración y el tiempo sin tener en cuenta la masa del objeto, la forma ni las fuerzas a las que está sometido. Por lo tanto, el objeto en movimiento se considera como una partícula.

	Posición: [m]	$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$
	Desplazamiento: [m]	$\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j}$ $\vec{r}_f = x_f\hat{i} + y_f\hat{j}$ $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$ $\Delta\vec{r} = (x_f - x_i)\hat{i} + (y_f - y_i)\hat{j}$
	Intervalo de tiempo: [s]	Velocidad media: $\vec{V}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}$ Velocidad instantánea: $\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ Este vector es tangente a cada punto de la trayectoria. Rapidez: Magnitud de la velocidad. $ \vec{V} = v$
	Velocidad: [m/s]	Aceleración media: $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_f - \vec{V}_i}{t_f - t_i}$ Aceleración instantánea: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ Magnitud de la aceleración. $ \vec{a} = a$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

El objeto describe una trayectoria a lo largo de una línea recta. Se mueve sin cambiar de dirección.

	Posición: [m]	x
	Desplazamiento: [m]	$\Delta x = x_f - x_i$
	Intervalo de tiempo: [s]	$\Delta t = t_f - t_i$
	Velocidad: [m/s]	Velocidad media: $V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$ Velocidad instantánea: $V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$
	Aceleración: [m/s²]	Aceleración media: $a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_f - V_i}{t_f - t_i}$ Aceleración instantánea: $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME ACELERADO (MRUA)

En este caso el objeto se mueve con aceleración constante. Deduzcamos las expresiones para la velocidad y la posición en función del tiempo:

De la definición de aceleración:	$a = \frac{dV}{dt} = \text{const}$
Para la velocidad. Integrando:	$\Rightarrow dV = a dt$ $\Rightarrow \int_{V_i}^V dV = \int_{t_i}^t a dt$ $\Rightarrow \int_{V_i}^V dV = a \int_{t_i}^t dt$ $\Rightarrow V _{V_i}^V = a t _{t_i}^t$ $\Rightarrow V - V_i = a (t - t_i)$ $\Rightarrow V = V_i + a (t - t_i)$
De la definición de velocidad:	$V = \frac{dx}{dt}$
Para la posición. Integrando:	$\Rightarrow dx = V dt$ $\Rightarrow \int_{x_i}^x dx = \int_{t_i}^t V dt$ $\Rightarrow \int_{x_i}^x dx = \int_{t_i}^t [V_i + a (t - t_i)] dt$ $\int_{x_i}^x dx = \int_{t_i}^t V_i dt + \int_{t_i}^t a (t - t_i) dt$ $\int_{x_i}^x dx = V_i \int_{t_i}^t dt + a \int_{t_i}^t (t - t_i) dt$ $\Rightarrow x _{x_i}^x = V_i t _{t_i}^t + a \frac{(t - t_i)^2}{2} \Big _{t_i}^t$ $\Rightarrow x - x_i = V_i (t - t_i) + \frac{1}{2} a (t - t_i)^2$ $\Rightarrow x = x_i + V_i (t - t_i) + \frac{1}{2} a (t - t_i)^2$

Combinando las expresiones para la posición y la velocidad, es posible demostrar que la relación entre la velocidad y la distancia recorrida está dada por:

$$\begin{aligned}
 x &= x_i + V_i (t - t_i) + \frac{1}{2} a (t - t_i)^2 \\
 V &= V_i + a (t - t_i) \Rightarrow t - t_i = \frac{V - V_i}{a} \\
 \Rightarrow x &= x_i + V_i \left(\frac{V - V_i}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{V - V_i}{a} \right)^2 \\
 \Rightarrow x &= x_i + \left(\frac{V V_i - V_i^2}{a} \right) + \frac{1}{2} \frac{(V - V_i)^2}{a} \\
 \Rightarrow x &= x_i + \left(\frac{V V_i - V_i^2}{a} \right) + \frac{1}{2} \frac{(V^2 - 2V V_i + V_i^2)}{a} \\
 \Rightarrow x &= x_i + \frac{V V_i}{a} - \frac{V_i^2}{a} + \frac{1}{2} \frac{V^2}{a} - \frac{1}{2} \frac{2V V_i}{a} + \frac{1}{2} \frac{V_i^2}{a} \\
 \Rightarrow x &= x_i + \frac{V V_i}{a} - \frac{V_i^2}{a} + \frac{1}{2} \frac{V^2}{a} - \frac{V V_i}{a} + \frac{1}{2} \frac{V_i^2}{a} \\
 \Rightarrow x &= x_i + \frac{1}{2} \frac{V^2}{a} - \frac{1}{2} \frac{V_i^2}{a} \\
 \Rightarrow x - x_i &= \frac{1}{2a} (V^2 - V_i^2) \\
 \Rightarrow V^2 &= V_i^2 + 2a(x - x_i)
 \end{aligned}$$

Dado que en este caso la aceleración media y la aceleración instantánea son iguales se puede demostrar que:

$$\begin{aligned}
 x &= x_i + V_i (t - t_i) + \frac{1}{2} a (t - t_i)^2 \\
 x &= x_i + V_i (t - t_i) + \frac{1}{2} \frac{V - V_i}{t - t_i} (t - t_i)^2 \\
 x &= x_i + V_i (t - t_i) + \frac{1}{2} (V - V_i)(t - t_i) \\
 x &= x_i + V_i (t - t_i) + \frac{1}{2} V(t - t_i) - \frac{1}{2} V_i(t - t_i) \\
 x &= x_i + \frac{1}{2} V(t - t_i) + \frac{1}{2} V_i(t - t_i) \\
 x &= x_i + \frac{1}{2} (V + V_i)(t - t_i)
 \end{aligned}$$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)

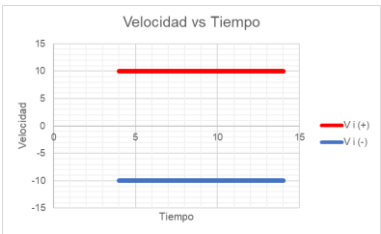
En este caso el objeto se mueve con velocidad constante. Por lo tanto, la aceleración es cero. Las expresiones para la posición y la velocidad se obtienen de las del MRUA sustituyendo $a = 0$.

Para la aceleración:	$a = \frac{dV}{dt} = 0$
Para la velocidad.	$V = V_i + a (t - t_i)$ $V = V_i + 0 (t - t_i)$ $\Rightarrow V = V_i = \text{const}$
Para la posición.	$x = x_i + V_i (t - t_i) + \frac{1}{2} a (t - t_i)^2$ $x = x_i + V_i (t - t_i) + \frac{1}{2} 0 (t - t_i)^2$ $\Rightarrow x = x_i + V_i (t - t_i)$

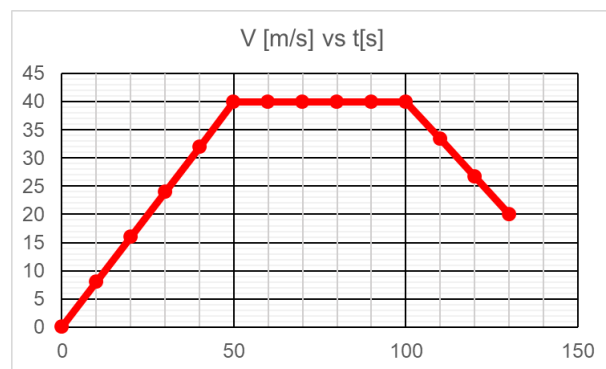
En resumen, las expresiones que relacionan la posición x , la velocidad V y la aceleración a en función del tiempo para los movimientos rectilíneos MRU y MRUA son:

	MR	MRUA	MRU
POSICIÓN	x	$x = x_i + V_i (t - t_i) + \frac{1}{2} a (t - t_i)^2$	$x = x_i + V_i (t - t_i)$
VELOCIDAD	$V = \frac{dx}{dt}$	$V = V_i + a (t - t_i)$	$V = V_i = \text{const}$
ACELERACIÓN	$a = \frac{dV}{dt}$	$a = \text{const}$	$a = 0$

Estas expresiones se pueden representar gráficamente a manera de funciones x vs t , V vs t y a vs t .

	MRU	MRUA
POSICIÓN		
VELOCIDAD		
ACELERACIÓN		

Ejemplo: En una pista rectilínea, se hacen pruebas a una motocicleta de carreras y se obtienen los datos de velocidad en función del tiempo mostrados en la gráfica.



A partir de la misma determine:

- El tipo de movimiento que realizó la motocicleta en cada intervalo.
- La aceleración de la motocicleta en cada intervalo.
- La ecuación que expresa la velocidad de la motocicleta en función del tiempo en cada intervalo.
- Asumiendo que en $t=0$ la posición de la motocicleta era $x=0$, determine la ecuación de la posición de la motocicleta para cada intervalo.
- Calcule la velocidad y la posición de la motocicleta en los instantes de tiempo $t=30s$, $t=80s$, $t=120s$.

	a)	b)	c)	d)
Intervalo	Tipo de movimiento	Aceleración	Ecuación de la velocidad	Ecuación de la posición
$0 < t < 50 \text{ s}$	MRUA	$a = \frac{V_f - V_i}{t_f - t_i}$ $a = \frac{40 - 0}{50 - 0}$ $a = 0,8 \text{ m/s}^2$	$V = V_i + a(t - t_i)$ $V = 0 + 0,8(t - 0)$ $V = 0,8 t$	$x = x_i + V_i(t - t_i) + \frac{1}{2}a(t - t_i)^2$ $x = 0 + 0(t - 0) + \frac{1}{2} * 0,8 * (t - 0)^2$ $x = 0,4 t^2$
$50 < t < 100 \text{ s}$	MRU	0	$V = V_i$ $V = 40 \text{ m/s}$	$x = x_i + V_i(t - t_i)$ $x_i = 0,4 50^2 = 1000 \text{ m}$ $x = 1000 + 40(t - 50)$
$100 < t < 130 \text{ s}$	MRUA	$a = \frac{V_f - V_i}{t_f - t_i}$ $a = \frac{20 - 40}{130 - 100}$ $a = -0,6667 \text{ m/s}^2$	$V = V_i + a(t - t_i)$ $V = 40 - 0,6667(t - 100)$	$x = x_i + V_i(t - t_i) + \frac{1}{2}a(t - t_i)^2$ $x_i = 1000 + 40(100 - 50) = 3000 \text{ m}$ $x = 3000 + 40(t - 100) + \frac{1}{2}(-0,6667)(t - 100)^2$ $x = 3000 + 40(t - 100) - 0,033(t - 100)^2$

e)

$t \text{ [s]}$	Velocidad	Posición
30	$V = 0,8 t$ $V = 0,8 * 30 = 24 \text{ m/s}$	$x = 0,4 t^2$ $x = 0,4 30^2 = 360 \text{ m}$
80	$V = 40 \text{ m/s}$	$x = 1000 + 40(t - 50)$ $x = 1000 + 40(80 - 50) = 2200 \text{ m}$
120	$V = 40 - 0,6667(t - 100)$ $V = 40 - 0,6667(120 - 100) = 26,666 \text{ m/s}$	$x = 3000 + 40(t - 100) - 0,033(t - 100)^2$ $x = 3000 + 40(120 - 100) - 0,03334(120 - 100)^2$ $x = 3666,66 \text{ m}$

Ejemplo: En una autopista rectilínea, unos malhechores huyen en una camioneta a 80 km/h. Los policías en una patrulla detenida los ven pasar e inician la persecución cuando la camioneta se encuentra ya a 50 m de distancia, como se muestra en la figura. Si la patrulla mantiene una aceleración de $0,5 \text{ m/s}^2$ y la camioneta mantiene su velocidad determine:



- Las ecuaciones que expresan la velocidad y la posición de la patrulla y la camioneta.
- Calcule el instante de tiempo en que la patrulla logra alcanzar a la camioneta.
- Calcule la velocidad que tiene la patrulla cuando logra alcanzar a la camioneta.
- Calcule la posición de ambos vehículos para el instante en que la patrulla alcanza a la camioneta.

a) Patrulla: MRUA

$$V = V_i + a (t - t_i)$$

$$V = 0 + 0,5 (t - 0)$$

$$V_P = 0,5 t$$

$$x = x_i + V_i (t - t_i) + \frac{1}{2} a (t - t_i)^2$$

$$x = 0 + 0 (t - 0) + \frac{1}{2} * 0,5 * (t - 0)^2$$

$$x_P = 0,25 * t^2$$

Camioneta: MRU

$$V = V_i$$

$$V = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 22,2222 \text{ m/s}$$

$$V_C = 22,2222 \text{ m/s}$$

$$x = x_i + V_i (t - t_i)$$

$$x = 50 + 22,2222(t - 0)$$

$$x_C = 50 + 22,2222 t$$

b)

$$x_P = x_C$$

$$0,25 * t^2 = 50 + 22,2222 t$$

$$0,25 * t^2 - 22,2222 t - 50 = 0$$

$$t = 91,0846 \text{ s} ; t = -2,1958 \text{ s}$$

c)

$$V_P = 0,5 t$$

$$V_P = 0,5 * 91,0846 = 45,5423 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 163,95 \text{ km/h}$$

d)

$$x_P = 0,25 * t^2$$

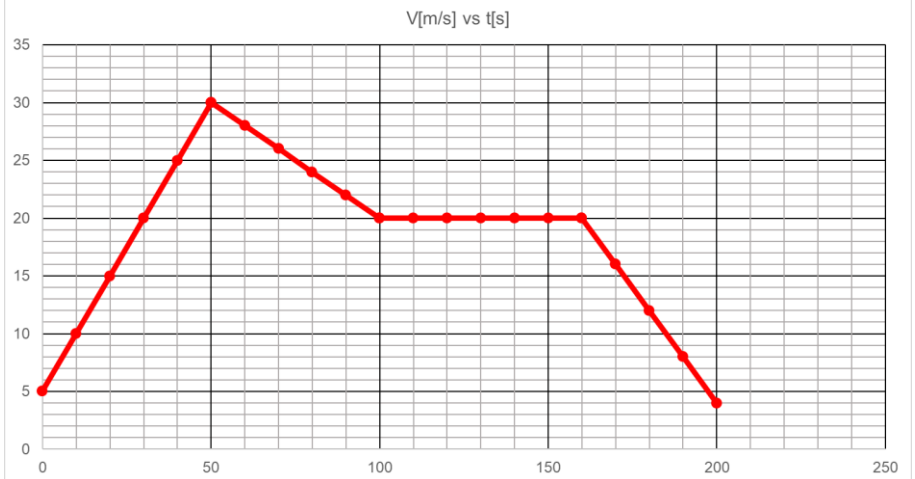
$$x_P = 0,25 * 91,0846^2 \approx 2074,1010 \text{ m}$$

$$x_C = 50 + 22,2222 t$$

$$x_C = 50 + 22,2222 * 91,0846 \approx 2074,1001 \text{ m}$$

Ejercicio:

Un auto de carreras es sometido a pruebas de velocidad y se obtienen los datos de velocidad en función del tiempo mostrados en la gráfica.



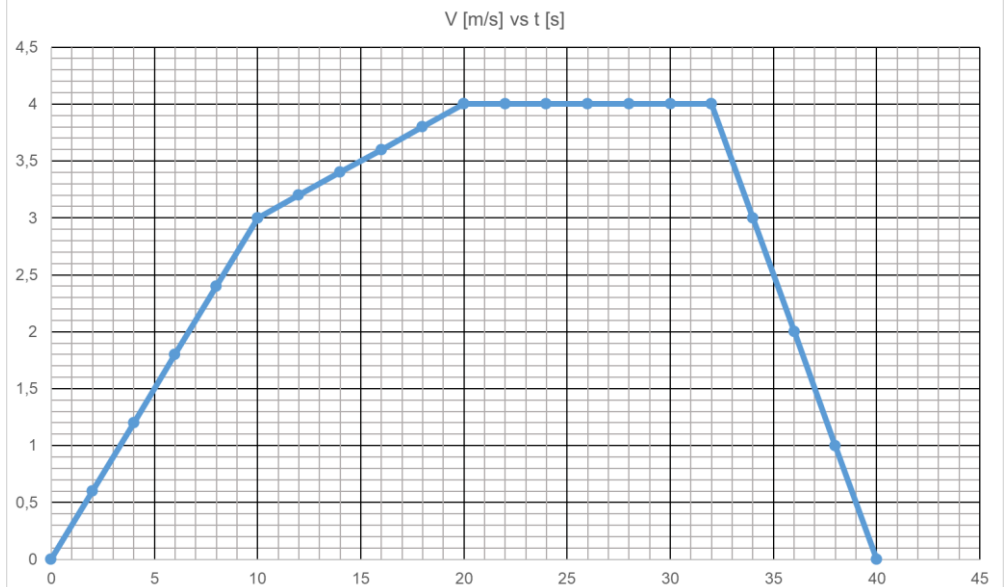
a) Determine para cada intervalo la aceleración y las ecuaciones que expresan la velocidad y la posición del auto en función del tiempo y complete la tabla. Asuma que en $t = 0$ la posición del auto era $x = 0$.

Intervalo	Aceleración	Velocidad	Posición
$0 < t < 50 \text{ s}$			
$50 < t < 100 \text{ s}$			
$100 < t < 160 \text{ s}$			
$160 < t < 200 \text{ s}$			

b) Calcule la velocidad y la posición en los siguientes instantes de tiempo: $t=20 \text{ s}$, $t=70 \text{ s}$, $t=120 \text{ s}$, $t=190 \text{ s}$.

Ejercicio: En una prueba de atletismo con un estudiante, el equipo técnico obtiene los datos de velocidad en función del tiempo que se muestran en la gráfica. Asuma que en $t = 0$ la posición del estudiante era $x = 0$.

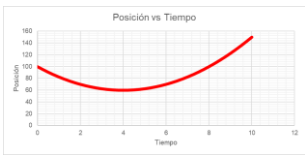
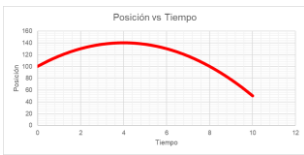
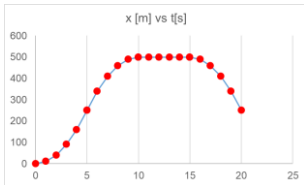
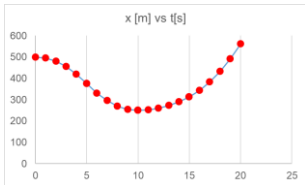
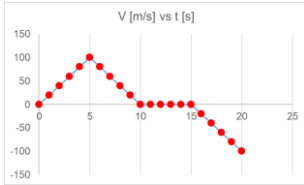
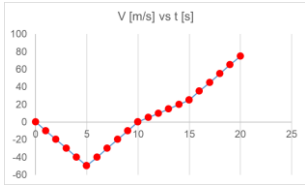
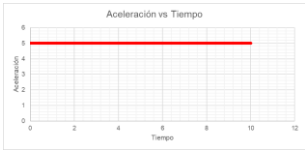
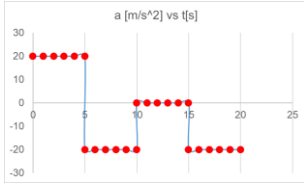
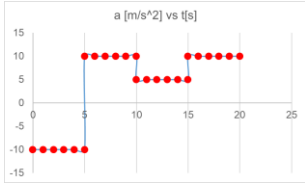
Determine a partir de la gráfica la posición final x del estudiante.



INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

Considerando la interpretación geométrica de los conceptos de derivada (pendiente de la recta tangente) y de integral definida (área bajo la curva), se puede obtener a su vez una interpretación física del comportamiento de las gráficas de la cinemática.

	GRÁFICA		
	x vs t	V vs t	a vs t
PENDIENTE	La pendiente de la gráfica x vs t en uno de sus puntos, equivale a la velocidad. $V = \frac{dx}{dt}$	La pendiente de la gráfica V vs t en uno de sus puntos, equivale a la aceleración. $a = \frac{dV}{dt}$	“Sacudida”
ÁREA		El área entre la gráfica V vs t y el eje t en un intervalo de tiempo, equivale al desplazamiento. $\Delta x = x_f - x_i = \int_{t_i}^t V dt$	El área entre la gráfica a vs t y el eje t en un intervalo de tiempo, equivale al cambio de velocidad. $\Delta V = V_f - V_i = \int_{t_i}^t a dt$

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
			
			
			

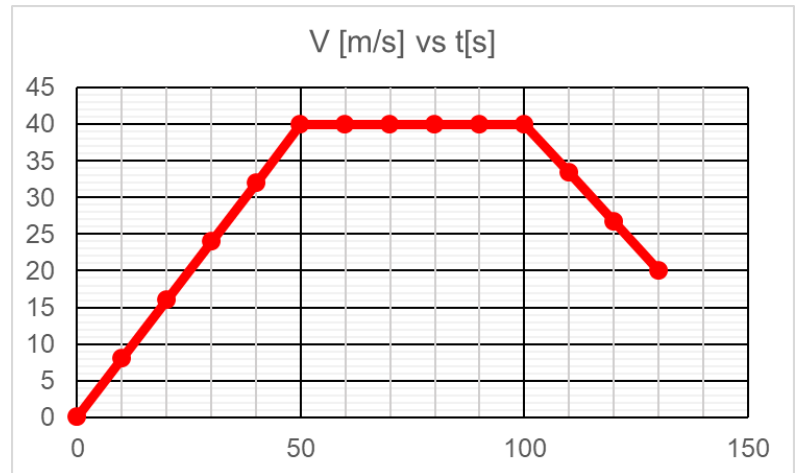
Observar en cada intervalo cómo la inclinación decreciente, creciente u horizontal de la gráfica x vs t se relaciona con el signo de la gráfica V vs t .

Observar en cada intervalo cómo la inclinación decreciente, creciente u horizontal de la gráfica V vs t se relaciona con el signo de la gráfica a vs t .

Ejercicio: En una pista rectilínea, se hacen pruebas a una motocicleta de carreras y se obtienen los datos de velocidad en función del tiempo mostrados en la gráfica.

A partir de la misma determine:

- La distancia que recorrió la motocicleta en cada intervalo.
- La aceleración de la motocicleta en cada intervalo.



➤ RECURSOS COMPLEMENTARIOS

Simuladores de movimiento rectilíneo con gráficas de MRU y MRUA:

Movimiento con Aceleración Constante. (n.d.). *Www.walter-Fendt.de*. https://www.walter-fendt.de/html5/phes/acceleration_es.htm

Graphing of Motion Lab. (2025). *Thephysicsaviary.com*. <https://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/GraphingOfMotionLab/index.html>

MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS BAJO INFLUENCIA DE LA GRAVEDAD

Una aplicación del movimiento rectilíneo uniforme acelerado es el estudio del movimiento de cuerpos que se mueven bajo influencia única de la aceleración de la gravedad a lo largo de una línea recta en dirección vertical. Se pueden dar dos situaciones: desde cierta altura el objeto o se deja caer o se lanza con alguna velocidad inicial en dirección vertical.

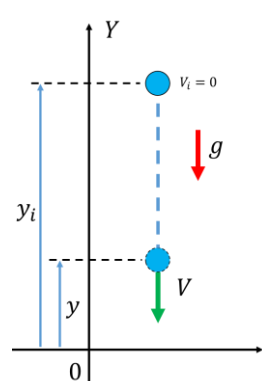
CAÍDA LIBRE Y LANZAMIENTO VERTICAL

Si no hay resistencia del aire y la aceleración de la gravedad es constante, estos movimientos son MRUA donde la aceleración es la gravedad. Las ecuaciones que describen estos movimientos se obtienen a partir de las de MRUA considerando que el eje de referencia para analizar el movimiento es el eje y positivo hacia arriba y la aceleración de la gravedad queda negativa hacia abajo. Entonces simplemente sustituyendo en las expresiones: $x \rightarrow y$; $a \rightarrow -g$.

	MR	ECUACIONES
POSICIÓN	y	$y = y_i + V_i (t - t_i) - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$
VELOCIDAD	$V = \frac{dy}{dt}$	$V = V_i - g (t - t_i)$
ACELERACIÓN	$a = \frac{dV}{dt}$	$a = -g$
		$V^2 = V_i^2 - 2g(y - y_i)$

Caída libre:

El objeto se deja caer desde una altura inicial y_i y a partir del reposo, por lo tanto $V_i = 0$. Entonces, las ecuaciones son:

$y = y_i - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$ $V = -g (t - t_i)$ $V^2 = -2g(y - y_i)$ $a = -g$	
--	---

Lanzamiento vertical:

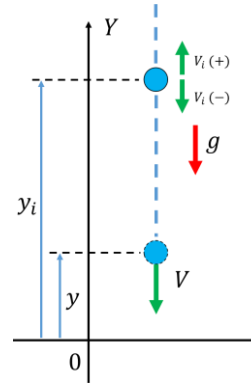
El objeto se lanza (hacia arriba o hacia abajo) desde una altura inicial y_i y a partir del reposo, por lo tanto $V_i \neq 0$. Entonces, las ecuaciones son:

$$y = y_i \pm V_i (t - t_i) - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$$

$$V = \pm V_i - g (t - t_i)$$

$$V^2 = V_i^2 - 2g(y - y_i)$$

$$a = -g$$



Ejemplo: Desde la ventana de un edificio, a 20 m de altura sobre el suelo, un estudiante deja caer las llaves para que su compañera afuera en la calle abra la puerta y pueda entrar.

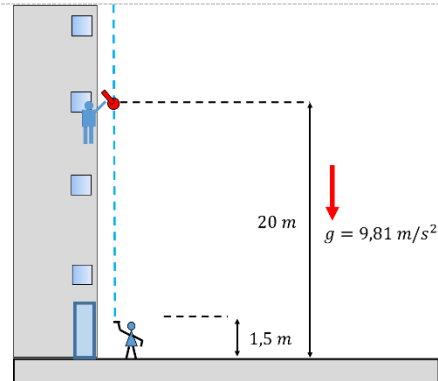
Determine:

a) Las ecuaciones que expresan la posición y la velocidad de las llaves en función del tiempo.

Si la compañera recibe las llaves a 1,5 m sobre el suelo, determine:

b) El tiempo que dura la caída de las llaves.

c) La velocidad de las llaves al momento de recibirlas.



a)

$$y = y_i - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$$

$$y = 20 - \frac{1}{2} * 9,81 * t^2$$

$$y = 20 - 4,905 * t^2$$

$$V = -g (t - t_i)$$

$$V = -9,81 * t$$

b)

$$y = 20 - 4,905 * t^2$$

$$1,5 = 20 - 4,905 * t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{1,5 - 20}{-4,905}} = 1,94208 \text{ s}$$

c)

$$V = -9,81 * t$$

$$V = -9,81 * 1,94208$$

$$V = -19,0518 \text{ m/s}$$

Ejemplo: Desde la planta baja afuera de un edificio, una estudiante lanza unas llaves a 15 m/s hacia arriba y desde una altura de 1,8 m sobre el suelo, para que las atrape su compañero en una ventana a 10 m de altura sobre el suelo. Determine:

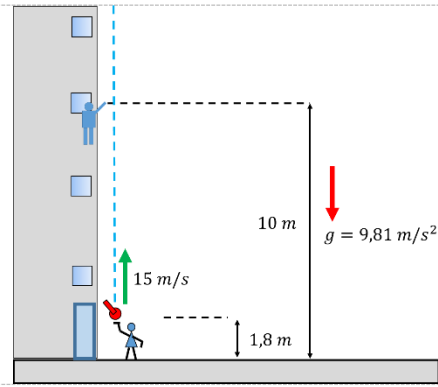
a) Las ecuaciones que expresan la posición y la velocidad de las llaves en función del tiempo.

Si el compañero recibe las llaves cuando estas vienen bajando, determine:

b) Hasta qué altura máxima alcanzaron a subir las llaves.

c) El tiempo que duran las llaves en movimiento.

d) La velocidad de las llaves al momento de recibirlas.



a)

$$y = y_i \pm V_i (t - t_i) - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$$

$$y = 1,8 + 15t - 4,905t^2$$

$$V = \pm V_i - g (t - t_i)$$

$$V = 15 - 9,81t$$

b)

$$V = 15 - 9,81t$$

$$0 = 15 - 9,81t \Rightarrow t = \frac{15}{9,81} = 1,529051 \text{ s}$$

$$y = 1,8 + 15t - 4,905t^2$$

$$y = 1,8 + 15 * 1,529051 - 4,905 * 1,529051^2$$

$$y_{max} = 13,2679 \text{ m}$$

$$V^2 = V_i^2 - 2g(y - y_i)$$

$$0 = 15^2 - 2 * 9,81 * (y - 1,8)$$

$$y_{max} = 1,8 + \frac{15^2}{2 * 9,81} = 13,2679 \text{ m}$$

c)

$$y = 1,8 + 15t - 4,905t^2$$

$$10 = 1,8 + 15t - 4,905t^2$$

$$-4,905t^2 + 15t + 1,8 - 10 = 0$$

$$-4,905t^2 + 15t - 8,2 = 0$$

$$t_{\downarrow} = 2,34529 \text{ s} ; t_{\uparrow} = 0,71282 \text{ s}$$

d)

$$V = 15 - 9,81t$$

$$V = 15 - 9,81 * 2,34529 = -8,0073 \text{ m/s}$$

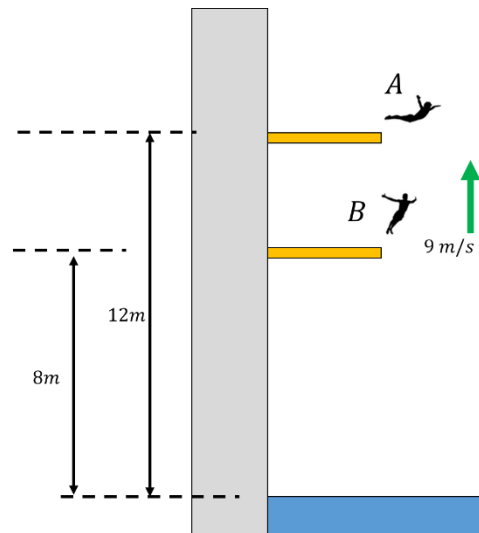
Ejemplo: Desde un trampolín ubicado a 12 m de altura sobre una piscina, un clavadista A se deja caer. Al mismo tiempo, otro clavadista B ubicado a 8 m de altura sobre la piscina sale lanzado a 3 m/s hacia arriba. La situación se muestra en la figura.

a) Determine las ecuaciones que expresan la posición y la velocidad de cada clavadista, respectivamente.

b) Determine si los clavadistas se cruzan. De ser así, determine en qué instante de tiempo y a qué altura se cruzan, así como la velocidad que lleva cada uno.

c) Calcule hasta qué altura logra ascender el clavadista B con respecto a la piscina.

d) Calcule en qué instantes de tiempo llegan los clavadistas a la superficie de la piscina y con qué velocidad impactan el agua.



a)

Clavadista A

$$y = y_i - \frac{1}{2} g(t - t_i)^2$$

$$y_A = 12 - 4,905t^2$$

$$V = -g(t - t_i)$$

$$V_A = -9,81 t$$

Clavadista B

$$y = y_i \pm V_i(t - t_i) - \frac{1}{2} g(t - t_i)^2$$

$$y_B = 8 + 3t - 4,905t^2$$

$$V = \pm V_i - g(t - t_i)$$

$$V_B = 3 - 9,81t$$

b)

$$y_A = y_B$$

$$12 - 4,905t^2 = 8 + 3t - 4,905t^2$$

$$12 = 8 + 3t$$

$$t = \frac{12 - 8}{3} = 1,3333 s$$

$$y_A = 12 - 4,905(1,3333)^2 = 3,2804 m$$

$$y_B = 8 + 3(1,3333) - 4,905(1,3333)^2 = 3,2803 m$$

$$V_A = -9,81(1,3333) = -10,0797 m/s$$

$$V_B = 3 - 9,81(1,3333) = -13,0797 m/s$$

c)

$$V^2 = V_i^2 - 2g(y - y_i)$$

$$0 = 3^2 - 2 * 9,81 * (y - 8)$$

$$y = y_{max} = 8 + \frac{3^2}{2 * 9,81} = 8,4587 m$$

d)

$$y_A = 12 - 4,905t^2 = 0$$

$$t_A = 1,5641 s$$

$$y_B = 8 + 3t - 4,905t^2 = 0$$

$$t = 1,6190 s$$

$$V_A = -9,81(1,5641)$$

$$= -15,3438 m/s$$

$$V_B = 3 - 9,81(1,6190)$$

$$= -12,8823 m/s$$

MOVIMIENTO CURVILÍNEO

En este caso el objeto describe una trayectoria a lo largo de una línea curva. Su velocidad cambia ya sea en magnitud o en dirección o en ambas. Por lo tanto, siempre poseerá aceleración. Los ejemplos típicos de este tipo de movimiento son el movimiento circular y el movimiento parabólico. Dejamos el caso del movimiento circular como un anexo y abordamos el movimiento parabólico.

MOVIMIENTO PARABÓLICO

Si un objeto es lanzado (proyectil) con su velocidad inicial orientada a un ángulo de inclinación respecto a la horizontal, de tal manera que la única aceleración que tenga sea la gravedad en dirección vertical, la trayectoria descrita por el objeto será una curva con forma de segmento de parábola. El movimiento realizado por este objeto se puede describir de manera independiente en cada uno de los ejes, siendo en el eje vertical un MRUA cuya aceleración es la gravedad mientras que en el eje horizontal se tendrá un MRU. Este movimiento se denomina movimiento parabólico, aunque en la literatura se le denomina también como lanzamiento oblicuo, movimiento de proyectiles, entre otros. Analizando este movimiento en el plano cartesiano se tiene lo siguiente:

	Posición: x MRU y MRUA	$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ $x = x_i + V_{ix}(t - t_i)$ $y = y_i + V_{iy}(t - t_i) - \frac{1}{2}g(t - t_i)^2$
	Velocidad inicial o velocidad de disparo:	$\vec{V}_i = V_{ix}\hat{i} + V_{iy}\hat{j}$ $V_{ix} = V_i \cos \theta_i$ $V_{iy} = V_i \sin \theta_i$ $V_i = \sqrt{V_{ix}^2 + V_{iy}^2}$ $\tan \theta_i = \frac{V_{iy}}{V_{ix}}$
	Velocidad: V_x MRU V_y MRUA	$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j}$ $V_x = V_{ix}$ $V_y = V_{iy} - g(t - t_i)$ $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ $\tan \theta = \frac{V_y}{V_x}$
	Aceleración:	$a_x = 0$ $a_y = a = -g$

En términos del ángulo de disparo, las ecuaciones que expresan las coordenadas x y y del proyectil en movimiento parabólico son:

$$x = x_i + V_i \cos \theta_i (t - t_i)$$

$$y = y_i + V_i \sin \theta_i (t - t_i) - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$$

En términos del ángulo de disparo, las ecuaciones que expresan las componentes rectangulares V_x y V_y de la velocidad del proyectil en movimiento parabólico son:

$$V_x = V_i \cos \theta_i$$

$$V_y = V_i \sin \theta_i - g(t - t_i)$$

Combinando las expresiones para las coordenadas x y y del proyectil, se obtiene la ecuación $y(x)$ de la trayectoria:

$$y = y_i + V_i \sin \theta_i (t - t_i) - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$$

$$x = x_i + V_i \cos \theta_i (t - t_i) \Rightarrow (t - t_i) = \frac{x - x_i}{V_i \cos \theta_i}$$

$$y = y_i + V_i \sin \theta_i \left(\frac{x - x_i}{V_i \cos \theta_i} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_i}{V_i \cos \theta_i} \right)^2$$

$$y = y_i + \tan \theta_i (x - x_i) - \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \cos^2 \theta_i} (x - x_i)^2$$

De esta ecuación se puede despejar la velocidad de disparo necesaria para que un proyectil lanzado desde un punto (x_i, y_i) a un ángulo de disparo conocido θ_i pase por las coordenadas dadas (x, y) .

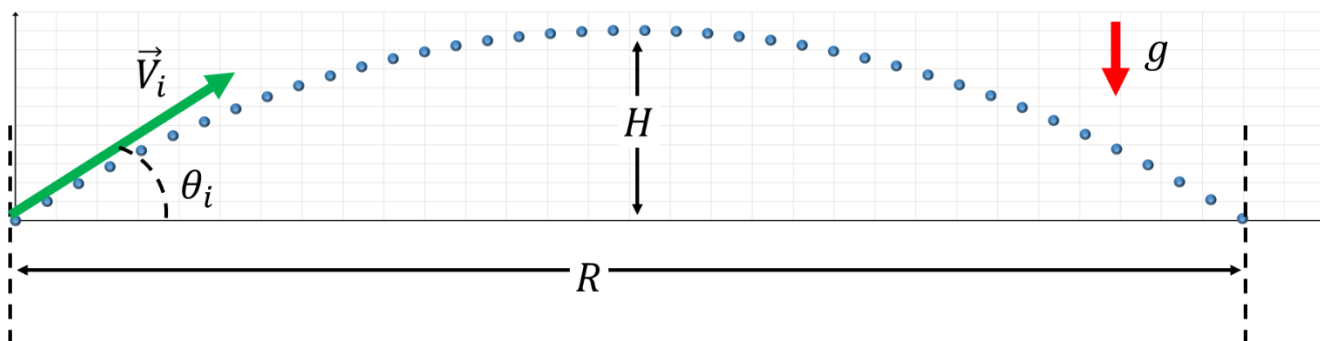
$$y = y_i + \tan \theta_i (x - x_i) - \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \cos^2 \theta_i} (x - x_i)^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \cos^2 \theta_i} (x - x_i)^2 = y_i + \tan \theta_i (x - x_i) - y$$

$$\frac{1}{2} \frac{g}{\cos^2 \theta_i} \frac{(x - x_i)^2}{y_i + \tan \theta_i (x - x_i) - y} = V_i^2$$

$$\Rightarrow V_i = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{g}{\cos^2 \theta_i} \frac{(x - x_i)^2}{y_i + \tan \theta_i (x - x_i) - y}}$$

Para el caso particular en el cual la distancia horizontal se mide desde el mismo nivel de altura del cual se lanzó el proyectil, se pueden demostrar las siguientes cantidades:



Alcance horizontal	Altura máxima	Tiempo de vuelo
$R = \frac{V_i^2}{g} \text{sen}(2\theta_i)$	$H = \frac{V_i^2}{2g} \text{sen}^2\theta_i$	$t_v = \frac{2V_i}{g} \text{sen}\theta_i$

Demostración:

- Para el alcance horizontal, consideremos la ecuación de la trayectoria.

$$y = y_i + \tan\theta_i (x - x_i) - \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \cos^2\theta_i} (x - x_i)^2$$

El proyectil se lanza desde una altura inicial y_i y luego al descender vuelve a pasar por esa misma altura inicial.

$$y_i = y_i + \tan\theta_i (x - x_i) - \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \cos^2\theta_i} (x - x_i)^2$$

Por lo tanto:

$$0 = \tan\theta_i (x - x_i) - \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \cos^2\theta_i} (x - x_i)^2 \Rightarrow \tan\theta_i (x - x_i) = \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \cos^2\theta_i} (x - x_i)^2$$

La distancia horizontal sería entonces $R = x - x_i$.

$$\tan\theta_i R = \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \cos^2\theta_i} R^2 \Rightarrow \tan\theta_i = \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \cos^2\theta_i} R \Rightarrow \frac{\text{sen}\theta_i}{\text{cos}\theta_i} = \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \text{cos}^2\theta_i} R \Rightarrow \text{sen}\theta_i = \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \text{cos}\theta_i} R$$

Despejando R :

$$R = \frac{2V_i^2}{g} \text{cos}\theta_i \text{sen}\theta_i$$

Aplicando la identidad trigonométrica: $\text{cos}\theta_i \text{sen}\theta_i = \text{sen}(2\theta_i)$

$$R = \frac{V_i^2}{g} \text{sen}(2\theta_i) \quad \blacksquare$$

- Para la altura máxima, consideremos la ecuación de la componente vertical de la velocidad. En el punto de altura máxima esta componente es cero:

$$V_y = V_i \text{sen} \theta_i - g(t - t_i)$$

$$0 = V_i \text{sen} \theta_i - g(t - t_i)$$

El tiempo transcurrido para esto es:

$$(t - t_i) = \frac{V_i \text{sen} \theta_i}{g}$$

Reemplazando en la ecuación de la coordenada y .

$$y = y_i + V_i \text{sen} \theta_i (t - t_i) - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$$

$$y = y_i + V_i \text{sen} \theta_i \left(\frac{V_i \text{sen} \theta_i}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_i \text{sen} \theta_i}{g} \right)^2 \Rightarrow y - y_i = V_i \text{sen} \theta_i \left(\frac{V_i \text{sen} \theta_i}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_i \text{sen} \theta_i}{g} \right)^2$$

Acá, la distancia vertical sería entonces $H = y - y_i$

$$H = V_i \text{sen} \theta_i \left(\frac{V_i \text{sen} \theta_i}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_i \text{sen} \theta_i}{g} \right)^2 = \frac{(V_i \text{sen} \theta_i)^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{(V_i \text{sen} \theta_i)^2}{g} \Rightarrow H = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \frac{(V_i \text{sen} \theta_i)^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{V_i^2 \text{sen}^2 \theta_i}{g}$$

Por lo tanto:

$$H = \frac{V_i^2}{2g} \text{sen}^2 \theta_i \quad \blacksquare$$

- Para el tiempo de vuelo se considera el instante de tiempo en que se cumple que la distancia horizontal $R = x - x_i$ en la ecuación de la coordenada x :

$$x = x_i + V_i \cos \theta_i (t - t_i)$$

$$x - x_i = V_i \cos \theta_i (t - t_i) \Rightarrow R = V_i \cos \theta_i (t - t_i)$$

El tiempo requerido para esto es:

$$\Rightarrow (t - t_i) = \frac{R}{V_i \cos \theta_i} \Rightarrow (t - t_i) = \frac{\frac{2V_i^2}{g} \cos \theta_i \text{sen} \theta_i}{V_i \cos \theta_i} \Rightarrow (t - t_i) = \frac{\frac{2V_i}{g} \text{sen} \theta_i}{1}$$

Entonces:

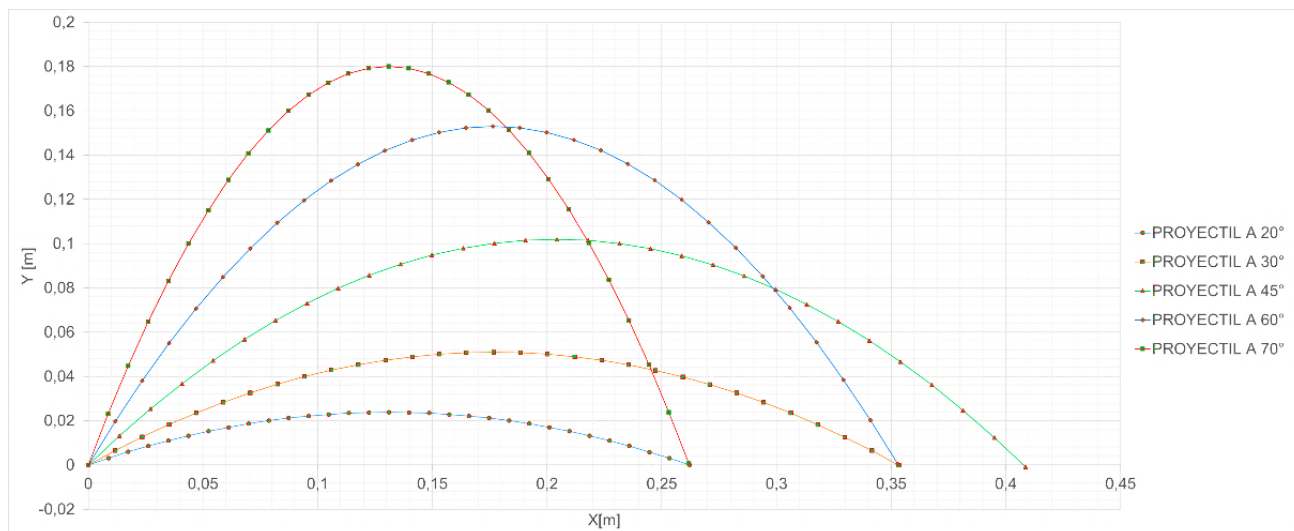
$$(t - t_i) = \frac{2V_i}{g} \text{sen} \theta_i = t_v$$

$$t_v = \frac{2V_i}{g} \text{sen} \theta_i \quad \blacksquare$$

De la relación para el alcance horizontal, se puede deducir que:

a) Ángulos complementarios poseen el mismo alcance horizontal para un mismo valor de V_i . Esto se verifica ya que $\text{sen}(2\theta_i) = \text{sen}(2(90 - \theta_i))$.

b) El máximo alcance horizontal para un valor fijo de V_i se obtiene cuando el proyectil se dispara a $\theta_i = 45^\circ$. Esto se verifica ya que el máximo valor del $\text{sen}(2\theta_i)$ se da cuando $2\theta_i = 90^\circ$ o sea cuando $\theta_i = 45^\circ$.



c) Se puede deducir una relación entre R , H y θ_i :

$$R = \frac{2V_i^2}{g} \cos\theta_i \text{sen}\theta_i ; H = \frac{V_i^2}{2g} \text{sen}^2\theta_i$$

$$\frac{H}{R} = \frac{\frac{V_i^2}{2g} \text{sen}^2\theta_i}{\frac{2V_i^2}{g} \cos\theta_i \text{sen}\theta_i} = \frac{\text{sen}\theta_i}{4 \cos\theta_i} = \frac{1}{4} \tan\theta_i$$

Es decir:

$$\tan\theta_i = \frac{4H}{R} \Rightarrow H = \left(\frac{\tan\theta_i}{4}\right) R$$

LANZAMIENTO HORIZONTAL (MOVIMIENTO SEMIPARABÓLICO)

Sucede cuando el proyectil se lanza desde una altura inicial con un ángulo de disparo $\theta_i = 0$. Entonces:

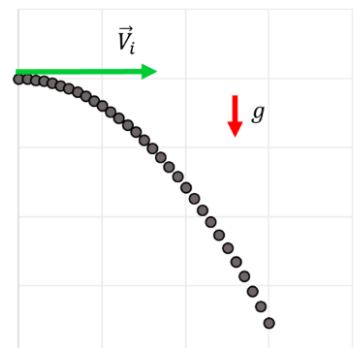
$$\text{sen}\theta_i = 0 ; \cos\theta_i = 1$$

$$x = x_i + V_i (t - t_i)$$

$$y = y_i - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$$

$$V_x = V_i$$

$$V_y = -g(t - t_i)$$



Ejemplo: Una estudiante juega con un balón de volleyball en la plazoleta Kefi y hace un saque de tal manera que el balón sale a un ángulo de 35° respecto a la horizontal y desde una altura de 2,2 m sobre el suelo. Asuma que se cumplen las condiciones para que el movimiento del balón sea parabólico. Si la velocidad con que sale lanzado el balón es de 10 m/s, determine:

- Las componentes cartesianas de la velocidad inicial del balón.
- Las ecuaciones que expresan las componentes cartesianas de la velocidad del balón en función del tiempo.
- La magnitud de la velocidad del balón en función del tiempo.
- Las ecuaciones que expresan las coordenadas x y y del balón en función del tiempo.
- La ecuación de la trayectoria del balón. Bosquéjela en el plano cartesiano.

f) El instante de tiempo en que el balón alcanza la altura máxima.

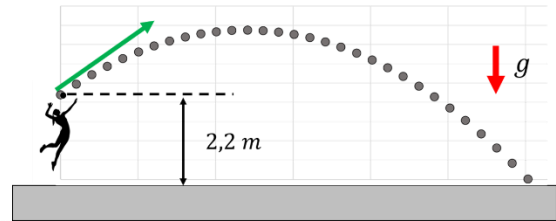
g) La altura máxima a la que sube el balón.

h) El instante de tiempo en que el balón llega al suelo.

i) La distancia horizontal recorrida por el balón hasta llegar al suelo.

j) La magnitud de la velocidad con que el balón impacta el suelo.

k) El ángulo que forma la velocidad del balón con la horizontal al momento de impactar el suelo.



a)

$$V_{ix} = V_i \cos \theta_i$$

$$V_{ix} = 10 * \cos 35^\circ$$

$$V_{ix} = 8,1915 \text{ m/s}$$

$$V_{iy} = V_i \sin \theta_i$$

$$V_{iy} = 10 * \sin 35^\circ$$

$$V_{iy} = 5,7358 \text{ m/s}$$

b)

$$V_x = V_i \cos \theta_i$$

$$V_x = 10 * \cos 35^\circ$$

$$V_x = 8,1915 \text{ m/s}$$

$$V_y = V_i \sin \theta_i - g(t - t_i)$$

$$V_y = 10 * \sin 35^\circ - 9,81 * (t - 0)$$

$$V_y = 5,7358 - 9,81 * t$$

c)

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$V = \sqrt{(8,1915)^2 + (5,7358 - 9,81 * t)^2}$$

$$V = \sqrt{67,1007 + (5,7358 - 9,81 * t)^2}$$

d)

$$x = x_i + V_i \cos \theta_i (t - t_i)$$

$$x = 0 + 10 * \cos 35^\circ (t - 0)$$

$$x = 10 * \cos 35^\circ t$$

$$x = 8,1915 * t$$

$$y = y_i + V_i \sin \theta_i (t - t_i) - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$$

$$y = 2,2 + 10 * \sin 35^\circ (t - 0) - \frac{1}{2} * 9,81 * (t - 0)^2$$

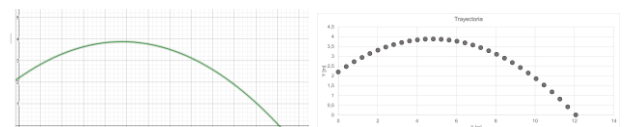
$$y = 2,2 + 5,7358 * t - 4,905 * t^2$$

e)

$$y = y_i + \tan \theta_i (x - x_i) - \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \cos^2 \theta_i} (x - x_i)^2$$

$$y = 2,2 + \tan 35^\circ * (x - 0) - \frac{1}{2} * \frac{9,81}{10^2 * \cos^2 35^\circ} * (x - 0)^2$$

$$y = 2,2 + 0,7002 * x - 0,073098 * x^2$$

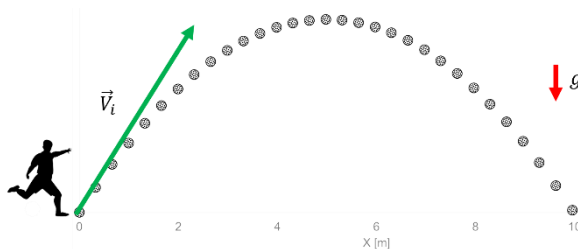


$$y = 2,2 + 0,7002 * x - 0,073098 * x^2$$

f) En el punto de altura máxima: $V_y = 0$ $V_y = 5,7358 - 9,81 * t$ $0 = 5,7358 - 9,81 * t$ $t = 5,7358/9,81$ $t = 0,58469 \text{ s}$	g) $y = 2,2 + 5,7358 * t - 4,905 * t^2$ $y_{max} = 2,2 + 5,7358 * (0,58469) - 4,905 * (0,58469)^2$ $y_{max} = 3,87683 \text{ m}$
h) Cuando el balón llega al suelo: $y = 0$ $y = 2,2 + 5,7358 * t - 4,905 * t^2$ $0 = 2,2 + 5,7358 * t - 4,905 * t^2$ $-4,905 * t^2 + 5,7358 * t + 2,2 = 0$ $t = 1,4737 \text{ s}$	i) $x = 8,1915 * t$ $x = 8,1915 * 1,4737$ $x = 12,07 \text{ m}$ $y = 2,2 + 0,7002 * x - 0,073098 * x^2$ $0 = 2,2 + 0,7002 * x - 0,073098 * x^2$ $-0,073098 * x^2 + 0,7002 * x + 2,2 = 0$ $x = 12,07 \text{ m}$
j) $V = \sqrt{67,1007 + (5,7358 - 9,81 * t)^2}$ $V = \sqrt{67,1007 + (5,7358 - 9,81 * 1,4737)^2} = 11,4649 \text{ m/s}$	k) $\tan \theta = \frac{V_y}{V_x}$ $\tan \theta = \frac{5,7358 - 9,81 * 1,4737}{8,1915} \Rightarrow \theta = -46,79^\circ$

Ejemplo: Un estudiante patea un balón que se encuentra en el piso en la plazoleta Kefi, sale a un ángulo de 58° y este cae a 10 m de distancia en la misma plazoleta. Calcule:

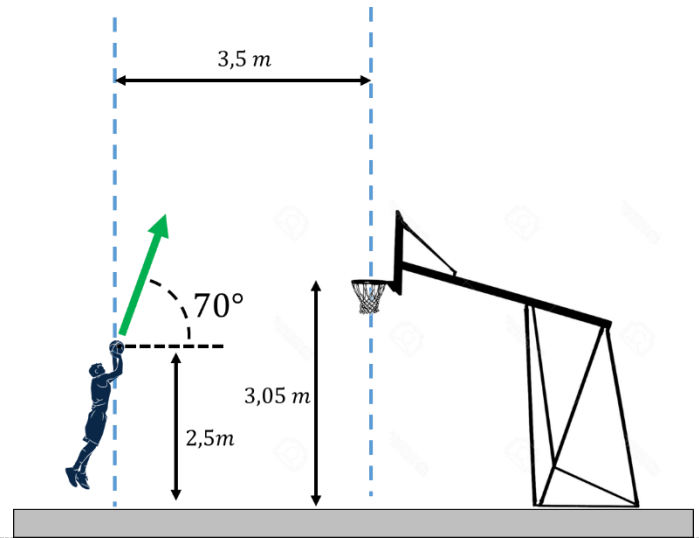
- La velocidad con que salió pateado el balón.
- La altura máxima que alcanzó el balón.
- El tiempo de vuelo del balón.



a) $R = \frac{V_i^2}{g} \sin(2\theta_i)$ $V_i = \sqrt{\frac{Rg}{\sin(2\theta_i)}} = \sqrt{\frac{10 * 9,81}{\sin(2 * 58^\circ)}} = 10,4473 \text{ m/s}$	b) $H = \frac{V_i^2}{2g} \sin^2 \theta_i = \frac{10,4473^2}{2 * 9,81} \sin^2(58^\circ) = 4,0008 \text{ m}$ c) $t_v = \frac{2V_i}{g} \sin \theta_i = \frac{2 * 10,4473}{9,81} \sin(58^\circ) = 1,80628 \text{ s}$
---	--

Ejemplo: Un estudiante juega en la plazoleta Kefi con un balón de baloncesto. Si lanza el balón desde una altura de 2,5 m sobre el suelo con un ángulo de 70° , como muestra la figura:

- Calcule la velocidad con que debe lanzar el balón para encestar.
- Plantee las ecuaciones que expresan la posición y la velocidad del balón en función del tiempo.
- Calcule hasta qué altura logra subir el balón.
- Calcule cuánto tarda en llegar el balón a la cesta desde que ha sido lanzado.
- Calcule la magnitud de la velocidad y el ángulo respecto a la horizontal con que el balón ingresa a la cesta.



$$y = y_i + \tan\theta_i (x - x_i) - \frac{1}{2} \frac{g}{V_i^2 \cos^2\theta_i} (x - x_i)^2$$

$$y = 2,5 + \tan 70^\circ (x - 0) - \frac{1}{2} \frac{9,81}{V_i^2 \cos^2 70^\circ} (x - 0)^2$$

$$y = 2,5 + 2,74748 * x - \frac{41,9310}{V_i^2} x^2$$

$$\frac{41,9310}{V_i^2} x^2 = 2,5 + 2,74748 * x - y$$

$$\frac{41,9310}{2,5 + 2,74748 * x - y} x^2 = V_i^2$$

$$\frac{41,9310}{2,5 + 2,74748 * 3,5 - 3,05} 3,5^2 = V_i^2$$

$$V_i = 7,5270 \text{ m/s}$$

Igualmente, de la ecuación para la velocidad de disparo:

$$V_i = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{g}{\cos^2\theta_i} \frac{(x - x_i)^2}{y_i + \tan\theta_i (x - x_i) - y}}$$

$$V_i = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{9,81}{\cos^2 70^\circ} \frac{(3,5 - 0)^2}{2,5 + \tan 70^\circ (3,5 - 0) - 3,05}} = 7,5270 \text{ m/s}$$

$$x = x_i + V_i \cos\theta_i (t - t_i)$$

$$x = 0 + 7,5270 * \cos 70^\circ (t - 0)$$

$$x = 2,5744 * t$$

$$y = y_i + V_i \sin\theta_i (t - t_i) - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$$

$$y = 2,5 + 7,5270 \sin 70^\circ (t - 0) - \frac{1}{2} * 9,81 * (t - 0)^2$$

$$y = 2,5 + 7,0731 * t - 4,905 * t^2$$

$$V_x = V_{ix}$$

$$V_x = V_i \cos\theta_i$$

$$V_x = 7,5270 * \cos 70^\circ$$

$$V_x = 2,5744 \text{ m/s}$$

$$V_y = V_{iy} - g(t - t_i)$$

$$V_y = 7,5270 \sin 70^\circ - 9,81 * (t - 0)$$

$$V_y = 7,0731 - 9,81 * t$$

$$V_y = 7,0731 - 9,81 * t = 0 \Rightarrow t = 0,7210 \text{ s}$$

$$y = 2,5 + 7,0731 * 0,7210 - 4,905 * 0,7210^2 = y_{\max}$$

$$y_{\max} = 5,0499 \text{ m}$$

$$d) \quad x = 2,5744 * t = 3,5 \Rightarrow t = 1,3595 \text{ s}$$

$$y = 2,5 + 7,0731 * t - 4,905 * t^2 = 3,05$$

$$\Rightarrow t = 1,3595 \text{ s} , \quad t = 0,0824 \text{ s}$$

$$e) \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$V = \sqrt{2,5744^2 + (7,0731 - 9,81 * t)^2}$$

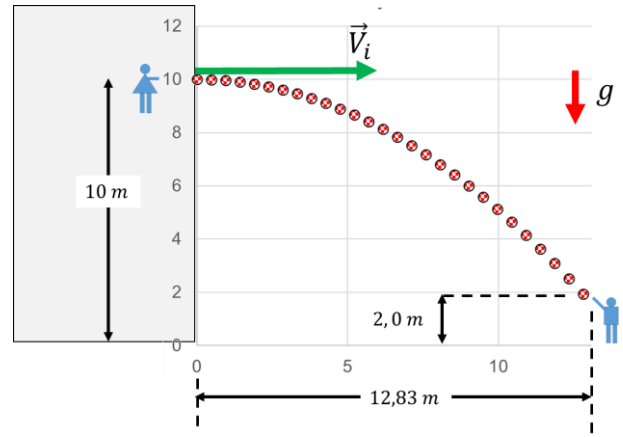
$$V = \sqrt{2,5744^2 + (7,0731 - 9,81 * 1,3595)^2} = 6,7720 \text{ m/s}$$

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

$$\tan\theta = \frac{7,0731 - 9,81 * 1,3595}{2,5744} \Rightarrow \theta = -67,66^\circ$$

Ejemplo: Una estudiante lanza horizontalmente por la ventana del edificio C una pelota desde una altura de 10 m sobre el nivel de la plazoleta Kefi, a un compañero que se encuentra en dicha plazoleta a 12,83 m. En este punto, atrapa la pelota a 2 m de altura sobre el piso. La situación se ilustra en la figura.

- Calcule la velocidad necesaria con que se debe lanzar la pelota para que esta llegue a las manos del compañero.
- Plantee las ecuaciones que describen la posición y la velocidad de la pelota en función del tiempo.
- Determine la ecuación de la trayectoria y bosquejela.
- El tiempo que dura el recorrido de la pelota.
- La magnitud de la velocidad de la pelota al momento de ser atrapada y el ángulo respecto a la horizontal.



a)	$x = x_i + V_i (t - t_i)$ $x = 0 + V_i (t - 0)$ $x = V_i t$ $y = y_i - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2$ $y = 10 - 4,905 * t^2$ $t = \frac{x}{V_i} \Rightarrow y = 10 - 4,905 * \left(\frac{x}{V_i}\right)^2$ $\left(\frac{x}{V_i}\right)^2 = \frac{10 - y}{4,905} \Rightarrow V_i = \sqrt{\frac{4,905}{10 - y}} * x$ $V_i = \sqrt{\frac{4,905}{10 - 2}} * 12,83 = 10,0462 \text{ m/s}$
b)	$x = 10,0462 * t$ $y = 10 - 4,905 * t^2$
c)	$y = 10 - \frac{4,905}{10,0462^2} * x^2$ $y = 10 - 9,9514 * x^2$
d)	$t = \frac{x}{V_i} = \frac{12,83}{10,0462} = 1,2771 \text{ s}$
e)	$V_x = V_i = 10,0462$ $V_y = -g(t - t_i) = -9,81 * t = -9,81 * 1,2771 = -12,5284 \text{ m/s}$ $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{10,0462^2 + (-12,5284)^2} = 16,0589 \text{ m/s}$ $\tan \theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{-12,5284}{10,0462} \Rightarrow \theta = -51,2747^\circ$

Ejemplo: Determine a qué ángulo se debe lanzar un proyectil para que:

- Su altura máxima sea 3 veces su alcance horizontal.
- Su alcance horizontal sea 3 veces su altura máxima.

De la relación

$$\tan \theta_i = \frac{4H}{R}$$

a)	$\tan \theta_i = \frac{4H}{R} ; H = 3R$ $\tan \theta_i = \frac{4(3R)}{R} \Rightarrow \tan \theta_i = 12 \Rightarrow \theta_i = 85,2364^\circ$
b)	$\tan \theta_i = \frac{4H}{R} ; R = 3H$ $\tan \theta_i = \frac{4H}{(3H)} \Rightarrow \tan \theta_i = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta_i = 53,1301^\circ$

➤ RECURSOS COMPLEMENTARIOS

- Simuladores

Movimiento de un Proyectoil. (2021). PhET. <https://phet.colorado.edu/es/simulations/projectile-motion>

Laboratorio de Datos de Projectiles. (2025). PhET. <https://phet.colorado.edu/es/simulations/projectile-data-lab>

Movimiento de Projectiles. (n.d.). Www.walter-Fendt.de. https://www.walter-fendt.de/html5/phes/projectile_es.htm

oPhysics. (n.d.). Ophysics.com. <https://ophysics.com/k8.html>

- Libros

3. DINÁMICA

Estudia el movimiento considerando la masa del objeto y las fuerzas a las que está sometido. Consideraremos que la forma y el tamaño del objeto no son relevantes para el análisis y se asumirá como una partícula. A continuación, algunas definiciones.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

- Masa: Es una cantidad física que cuantifica el contenido de materia de un objeto.

Unidades: $[kg]$

- Inercia: tendencia que tiene un objeto a mantener su velocidad. Es proporcional a la masa.
- Momentum: cantidad física que relaciona la masa de un objeto con la velocidad con que se mueve. Se define como el producto entre la masa y la velocidad. Es una cantidad vectorial.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Unidades: $\left[kg * \frac{m}{s} \right] = [N * s]$

- Fuerza: cantidad física que cuantifica la intensidad de la interacción entre dos objetos. Es una cantidad que posee magnitud y orientación espacial, por ende, es de carácter vectorial y cumple con las propiedades y operaciones con vectores.

Unidades: $\left[kg * \frac{m}{s^2} \right] = [N]$

TIPOS DE FUERZAS

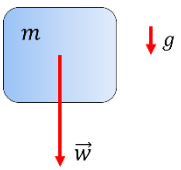
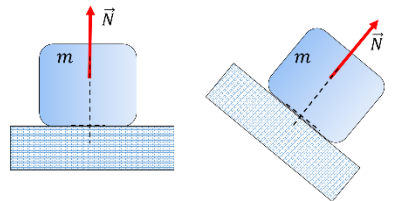
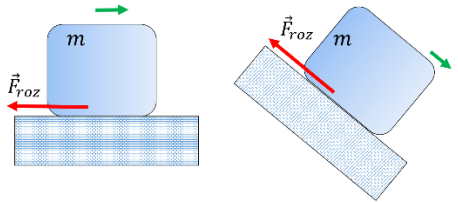
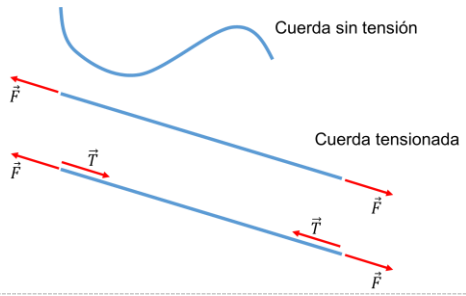
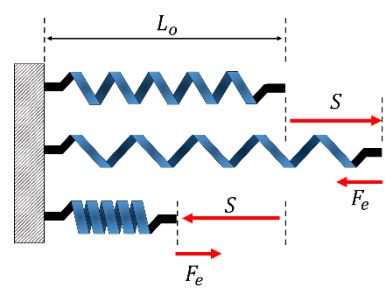
Las interacciones entre los objetos se pueden dar a distancia o por contacto directo.

- FUERZAS A DISTANCIA: En este caso la interacción entre los objetos no requiere del contacto directo entre estos. Por ejemplo, cuando acercamos un imán a un clavo de hierro, el imán logra hacer que el clavo se mueva aún sin haber hecho contacto. El Sol ejerce fuerza gravitacional sobre los planetas que se encuentran a varios kilómetros de distancia. La Luna afecta las masas de agua de los océanos produciendo las mareas.

INTERACCIONES FUNDAMENTALES			
INTERACCIÓN	PROPIEDAD	ALCANCE	EJEMPLOS
GRAVITACIONAL	Masa	$0 < r < \infty$	Luna – mareas, satélites, sistema solar, galaxias.
ELECTROMAGNÉTICA	Carga eléctrica	$0 < r < \infty$	Átomos, moléculas, ondas electromagnéticas.
FUERTE	Carga de color	$0 < r < 1 \times 10^{-15}$	Atracción entre quarks, estabilidad del núcleo
DÉBIL	Carga de sabor	$0 < r < 1 \times 10^{-18}$	Transmutación nuclear, decaimientos radiactivos.

- FUERZAS DE CONTACTO: La interacción entre los objetos se da por contacto directo. Por ejemplo, para insertar un clavo en una pared con un martillo, debemos golpear el clavo con el martillo. Para detener un vehículo en movimiento, se requiere de fuerza de contacto entre las llantas y el asfalto. Para pesar un bloque con una balanza, se requiere que el bloque se apoye sobre la balanza.

Consideraremos ahora cinco fuerzas de contacto:

FUERZA DE CONTACTO	DEFINICIÓN	REPRESENTACIÓN VECTORIAL
PESO	Fuerza debida a la interacción gravitacional. Se define como $\vec{w} = m\vec{g}$ donde m es la masa y $\vec{g}$ es la aceleración de la gravedad.	
NORMAL	Fuerza debida al contacto entre dos superficies. Esta fuerza es perpendicular a las superficies en contacto.	
ROZAMIENTO	Fuerza que se opone al deslizamiento entre las superficies en contacto. Depende de la fuerza normal entre el objeto y la superficie y también del coeficiente de rozamiento. Experimentalmente se encuentra que su magnitud es $F_{roz} = \mu N$ Donde μ es el coeficiente de rozamiento y es adimensional y N es la fuerza normal. Se definen dos tipos de rozamiento: el rozamiento estático que se da cuando aún no hay deslizamiento y el cinético que se da cuando ya hay deslizamiento. Por lo general el coeficiente de rozamiento estático es mayor al coeficiente de rozamiento dinámico: $\mu_s > \mu_d$	
TENSIÓN	Fuerza que actúa a lo largo de cuerdas, cables, etc. como respuesta a una fuerza aplicada.	
ELÁSTICA	Esta fuerza surge como respuesta a la deformación de un objeto. Cuando el objeto se deforma, la fuerza elástica tiende a retornar al objeto a su forma original. Como primera aproximación, la relación entre la deformación S y la fuerza elástica F_e es lineal, como lo establece la Ley de Hooke. $F_e = kS$ $\vec{F}_e = -k\vec{S}$ Donde k es la constante de elasticidad del resorte que cuantifica la resistencia del mismo a ser deformado longitudinalmente. Sus unidades son [N/m].	

LEYES DE NEWTON

El estado de reposo o de movimiento de un objeto está determinado por las fuerzas que actúan sobre este. Las leyes de Newton son la formulación matemática que relaciona las fuerzas con la aceleración del objeto.

La fuerza neta o fuerza total $\vec{F}$ sobre un objeto, se obtiene sumando vectorialmente todas las fuerzas que actúan sobre este.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

En términos de componentes cartesianas, se tiene:

$$F_x = \sum_i F_{ix} \quad ; \quad F_y = \sum_i F_{iy}$$

Esta fuerza neta tiene como efecto el cambio en el momentum del objeto.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Si la masa permanece constante:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \\ &\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} \end{aligned}$$

LEY DE NEWTON	ENUNCIADO	EXPRESIÓN MATEMÁTICA
Ley de la inercia	Si la fuerza neta sobre un objeto es nula, entonces este perseverará en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo con rapidez constante (MRU).	Si: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$ Entonces: $\vec{F} = m\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \text{const} \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$
Ley de la dinámica	Si la fuerza neta sobre un cuerpo no es nula, entonces tendrá una aceleración que es directamente proporcional a dicha fuerza neta, en la misma dirección y sentido e inversamente proporcional a su masa.	Si: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \neq 0$ Entonces: $\vec{F} = m\vec{a} \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$
Ley de acción y reacción	Si un objeto A ejerce una fuerza sobre otro objeto B, $\vec{F}_{A \rightarrow B}$, entonces el objeto B ejercerá una fuerza $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ sobre A, de igual magnitud y dirección pero sentido contrario.	Si: $\vec{F}_{A \rightarrow B} \Rightarrow \vec{F}_{B \rightarrow A}$ Tal que: $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$ $F_{A \rightarrow B} = F_{B \rightarrow A}$

Observaciones sobre la fuerza de rozamiento:

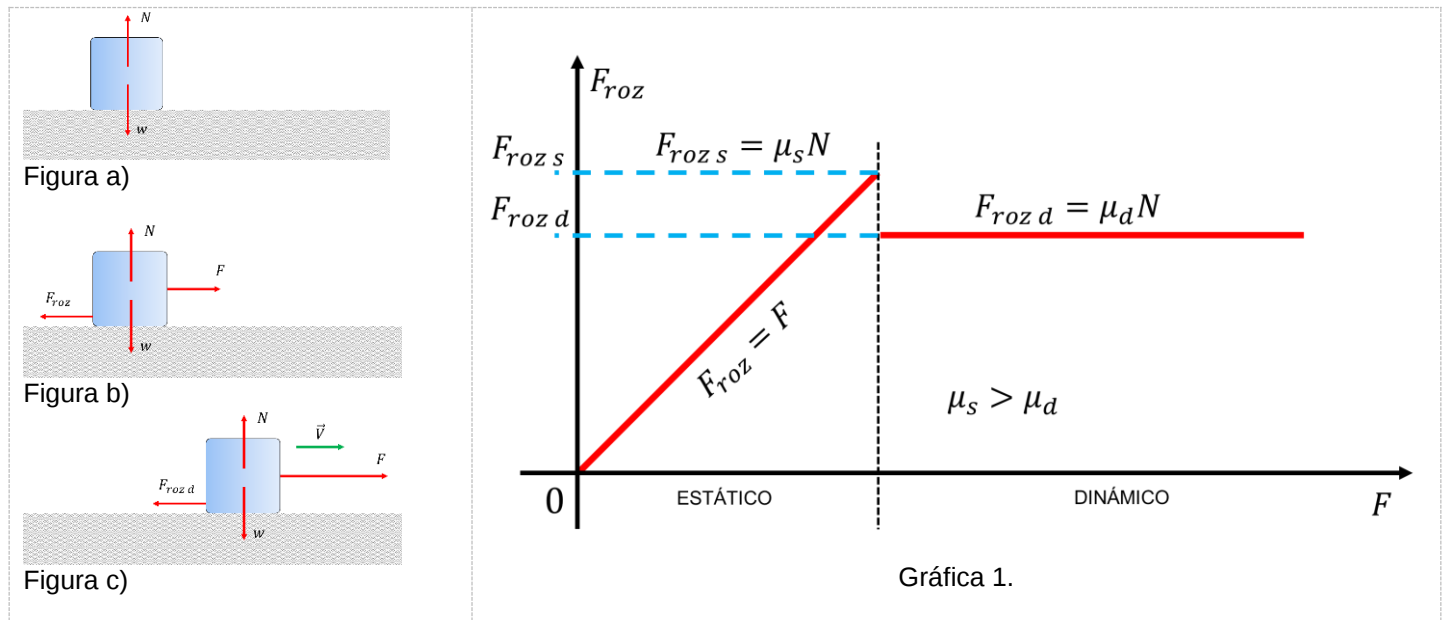
Esta fuerza se manifiesta cuando dos superficies entran en contacto y depende del material de cada una de las superficies. Desde el punto de vista microscópico, la fuerza de rozamiento se origina por las interacciones moleculares de cohesión o adhesión que dificultan el deslizamiento en mayor o menor medida. Desde el punto de vista macroscópico, depende de factores como la rugosidad, la lubricación, la temperatura, etc. El comportamiento de esta fuerza se describe a partir de los resultados experimentales. Consideremos la siguiente situación:

i) Un bloque en reposo sobre una superficie horizontal. En dirección vertical, al estar en contacto con una superficie, sobre el bloque actuará una fuerza normal. Debido a la masa y la gravedad, el bloque tendrá peso. En dirección horizontal inicialmente no hay ninguna fuerza (Figura a).

ii) Ahora, se aplica una fuerza F paralela al plano hacia la derecha, inicialmente de muy poca magnitud. Esta fuerza hará que el bloque tienda a deslizarse en este sentido. Sin embargo, no se moverá, debido a que entre las superficies en contacto se presenta la fuerza de rozamiento que se dirige en sentido opuesto y se igualará en magnitud a la fuerza aplicada (Figura b).

iii) Si se sigue aumentando la fuerza aplicada F , llegará a el punto en que alcance la fuerza límite máxima $F_{roz\ s}$, donde el deslizamiento es inminente $F = F_{roz\ s} = \mu_s N$. Una vez que la fuerza aplicada sea mayor que este valor, el objeto se deslizará y actuará la fuerza de rozamiento dinámico $F_{roz\ d} = \mu_d N$ (Figura c).

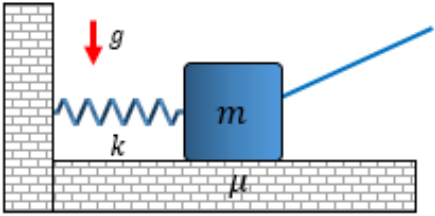
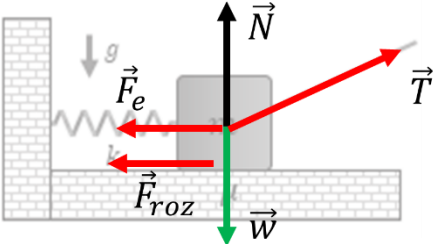
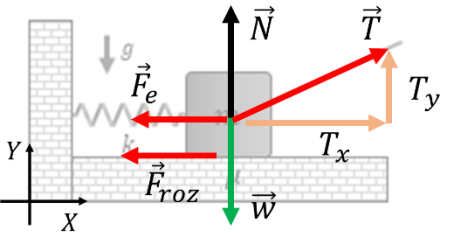
La gráfica 1 muestra el comportamiento de la fuerza de rozamiento a medida que se aumenta la fuerza aplicada.



Los experimentos muestran que la fuerza de rozamiento prácticamente es independiente de la medida del área de las superficies en contacto. El coeficiente de rozamiento depende de los materiales que estén en contacto y se determina de manera experimental.

ALGUNOS COEFICIENTES DE ROZAMIENTO					
MATERIALES	μ_s	μ_d	MATERIALES	μ_s	μ_d
Madera // Madera	0,7	0,4	Acero // Acero	0,15	0,09
Madera // Cuero	0,5	0,4	Acero // Teflón	0,04	0,04
Madera // Vidrio	0,25	0,2	Hielo // Hielo	0,1	0,03
Madera // Caucho	0,7	0,6	Caucho // Cemento húmedo	0,3	0,25
Madera // Piedra	0,7	0,3	Caucho // Cemento seco	1,0	0,8

Por lo general, el primer paso para aplicar las leyes de Newton y determinar el estado de reposo o de movimiento de un objeto, consiste en identificar las fuerzas que actúan sobre este y representarlas gráficamente mediante vectores, esto es, realizar el diagrama de cuerpo libre (DCL).

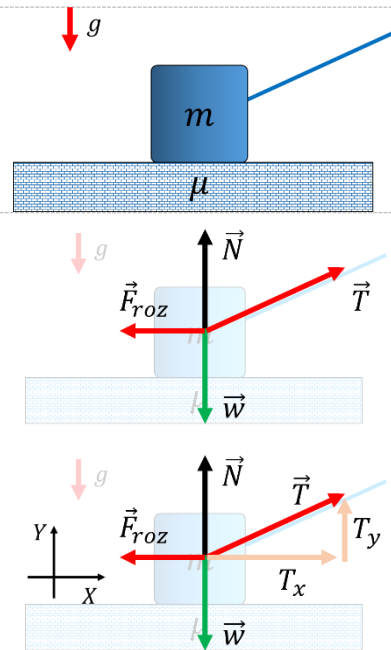
Ejemplo: Un bloque de masa m se encuentra sobre la superficie de un plano horizontal. El coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie del plano es μ. Un resorte de constante de elasticidad k se estira al retener al bloque y se mantiene paralelo al plano, como se muestra en la figura. El bloque es tirado mediante una cuerda. Realice el DCL del objeto, es decir, dibuje las fuerzas que actúan sobre el bloque.	
Ya que el bloque tiene masa y hay gravedad, tendrá peso, dirigido de manera vertical hacia abajo, representado por el vector $\vec{w}$. Debido a que el bloque se encuentra apoyado sobre la superficie del plano, actuará sobre el bloque la fuerza normal, que es perpendicular a la superficie de contacto y se representa por el vector $\vec{N}$. La cuerda que tira del bloque, ejerce sobre este una fuerza de tensión que se representa con el vector $\vec{T}$. Ya que el resorte se estira hacia la derecha, surge una fuerza elástica que actúa sobre el bloque en sentido contrario a la deformación causada, es decir, hacia la izquierda. La fuerza elástica por lo tanto queda dirigida como se muestra en la figura, representada por el vector $\vec{F}_e$. Ya que el bloque tiende a deslizarse hacia la derecha del plano (por la tensión aplicada), surge una fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque en sentido contrario. La fuerza de rozamiento por lo tanto queda dirigida paralela al plano como se muestra en la figura, representada por el vector $\vec{F}_{roz}$.	
Una vez que se han representado las fuerzas, se elige una orientación conveniente para los eje cartesianos X y Y respecto a los cuales se plantearán las componentes rectangulares de las fuerzas.	

Ejemplo: Un bloque de masa m se encuentra sobre la superficie de un plano horizontal con coeficiente de fricción μ y tirado por una cuerda, como se muestra en la figura. Realice el DCL para el bloque.

Ya que el bloque tiene masa y hay gravedad, tendrá peso, dirigido de manera vertical hacia abajo, representado por el vector $\vec{w}$.

Debido a que el bloque se encuentra apoyado sobre la superficie del plano inclinado, actuará sobre el bloque la fuerza normal, que es perpendicular a la superficie de contacto y se representa por el vector $\vec{N}$.

La cuerda que sostiene a la esfera ejerce sobre esta una fuerza de tensión que se representa con el vector $\vec{T}$.

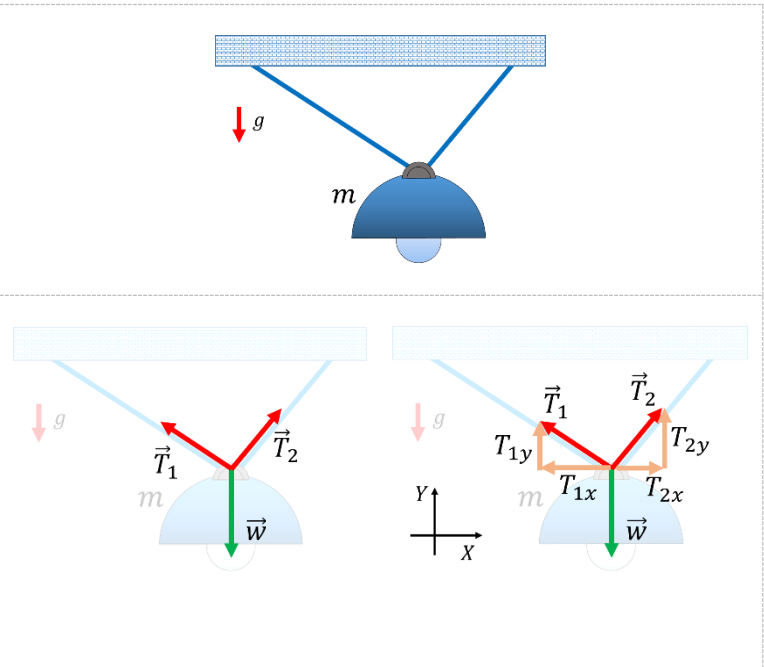


Ejemplo: Una lámpara de masa m se encuentra sostenida del techo por un sistema de cuerdas. Dibuje el DCL para la lámpara.

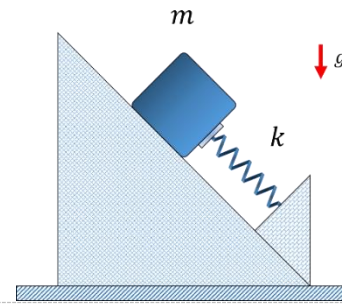
Ya que la lámpara tiene masa y hay gravedad, tendrá peso, dirigido de manera vertical hacia abajo, representado por el vector $\vec{w}$.

Las cuerdas que sostienen a la lámpara ejercen sobre esta una fuerza de tensión que actúa a lo largo de la cuerda y que se representan con los vectores $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$.

Una vez que se han representado las fuerzas, se elige una orientación conveniente para los ejes cartesianos X y Y respecto a los cuales se plantearán las componentes rectangulares de las fuerzas.



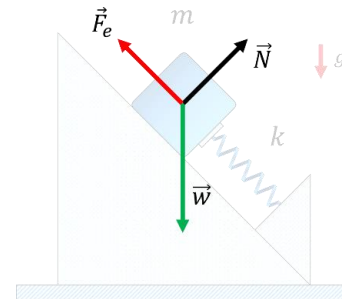
Ejemplo: Un bloque de masa m se encuentra sobre la superficie de un plano inclinado sin fricción y soportado por un resorte de constante de elasticidad k que se comprime al apoyar al bloque y se mantiene paralelo al plano, como se muestra en la figura. Dibuje las fuerzas que actúan sobre el bloque.



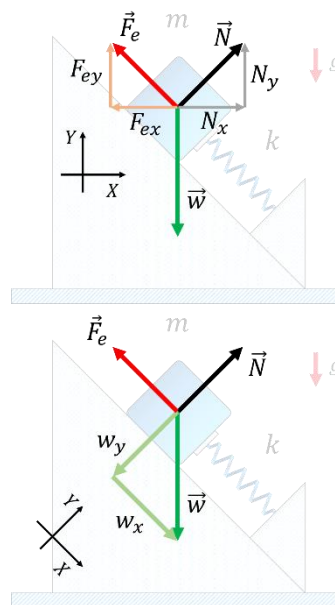
Ya que el bloque tiene masa y hay gravedad, tendrá peso, dirigido de manera vertical hacia abajo, representado por el vector $\vec{w}$.

Debido a que el bloque se encuentra apoyado sobre la superficie del plano inclinado, actuará sobre el bloque la fuerza normal, que es perpendicular a la superficie de contacto y se representa por el vector $\vec{N}$.

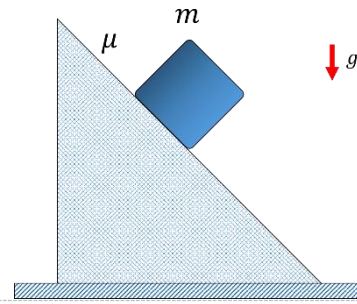
Ya que el resorte se comprime surge una fuerza elástica que actúa sobre el bloque en sentido contrario a la deformación causada. La fuerza elástica por lo tanto queda dirigida como se muestra en la figura, representada por el vector $\vec{F}_e$.



Una vez que se han representado las fuerzas, se elige una orientación conveniente para los eje cartesianos X y Y respecto a los cuales se plantearán las componentes rectangulares de las fuerzas.



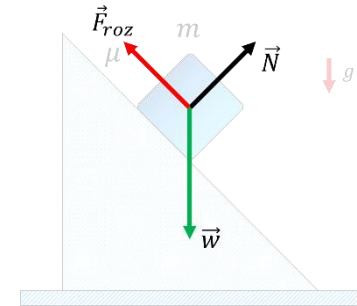
Ejemplo: Un bloque de masa m se encuentra sobre la superficie de un plano inclinado. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es μ . Realice el DCL de este bloque.



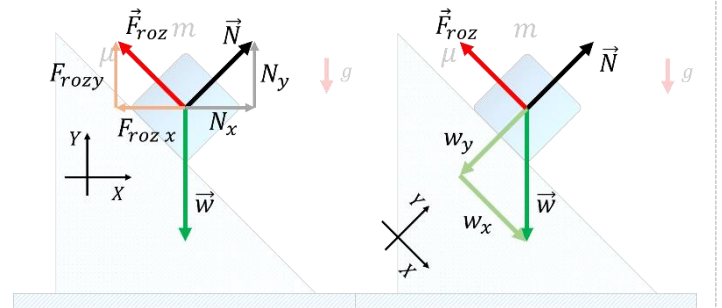
Ya que el bloque tiene masa y hay gravedad, tendrá peso, dirigido de manera vertical hacia abajo, representado por el vector $\vec{w}$.

Debido a que el bloque se encuentra apoyado sobre la superficie del plano inclinado, actuará sobre el bloque la fuerza normal, que es perpendicular a la superficie de contacto y se representa por el vector $\vec{N}$.

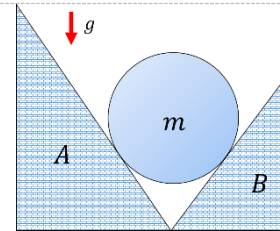
Ya que el bloque tiende a deslizarse hacia abajo del plano, surge una fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque en sentido contrario al desplazamiento. La fuerza de rozamiento por lo tanto queda dirigida paralela al plano inclinado como se muestra en la figura, representada por el vector $\vec{F}_{roz}$.



Una vez que se han representado las fuerzas, se elige una orientación conveniente para los ejes cartesianos X y Y respecto a los cuales se plantearán las componentes rectangulares de las fuerzas.



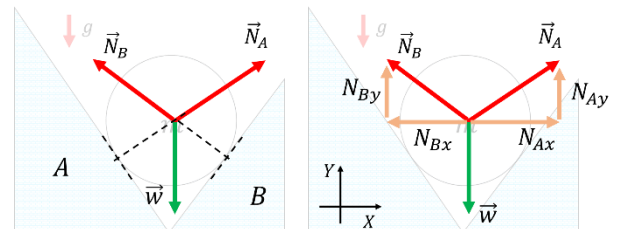
Ejemplo: Un monumento consiste de una esfera de masa m soportada por dos planos inclinados A y B sin fricción, como se muestra en la figura. Dibuje las fuerzas que actúan sobre la esfera.



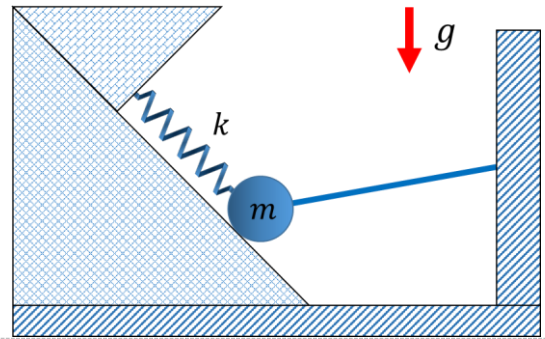
Ya que la esfera tiene masa y hay gravedad, tendrá peso, dirigido de manera vertical hacia abajo, representado por el vector $\vec{w}$.

Debido a que la esfera se encuentra apoyada sobre la superficie de cada plano inclinado, actuará sobre ella la fuerza normal que ejerce cada uno de los planos, que es perpendicular a las superficies de contacto y se representan por los vectores $\vec{N}_A$ y $\vec{N}_B$.

Una vez que se han representado las fuerzas, se elige una orientación conveniente para los ejes cartesianos X y Y respecto a los cuales se plantearán las componentes rectangulares de las fuerzas.



Ejemplo: Una esfera de masa m se encuentra sobre la superficie de un plano inclinado liso, sostenida por un resorte estirado y por una cuerda. Dibuje el DCL para esta esfera.

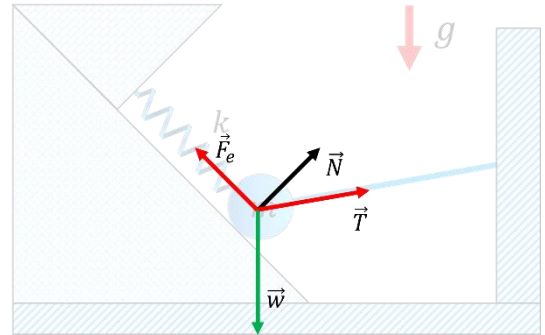


Ya que la esfera tiene masa y hay gravedad, tendrá peso, dirigido de manera vertical hacia abajo, representado por el vector $\vec{w}$.

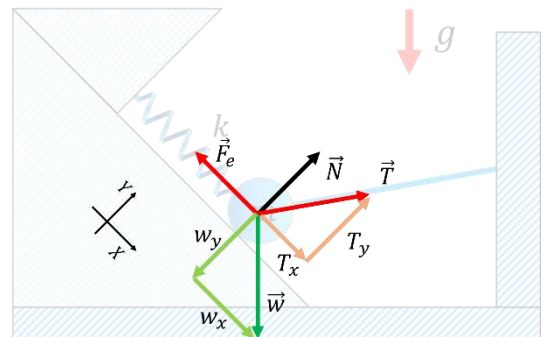
Debido a que la esfera se encuentra apoyada sobre la superficie del plano inclinado, actuará sobre ella la fuerza normal, que es perpendicular a la superficie de contacto y se representa por el vector $\vec{N}$.

Ya que el resorte se estira, surge una fuerza elástica que actúa sobre la esfera en sentido contrario a la deformación causada. La fuerza elástica por lo tanto queda dirigida como se muestra en la figura, representada por el vector $\vec{F}_e$.

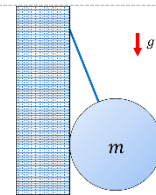
La cuerda que sostiene a la esfera ejerce sobre esta una fuerza de tensión que actúa a lo largo de la cuerda y que se representa con el vector $\vec{T}$.



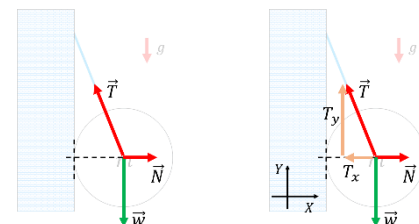
Una vez que se han representado las fuerzas, se elige una orientación conveniente para los eje cartesianos X y Y respecto a los cuales se plantearán las componentes rectangulares de las fuerzas.



Ejemplo: Una esfera de masa m se encuentra apoyada sobre la superficie de una pared que es un plano vertical liso y además es sostenida por una cuerda. Plantee el DCL para la esfera.



Sobre esta esfera actuará la fuerza de gravedad $\vec{w}$ (el peso), la fuerza normal $\vec{N}$ que ejerce la pared y la tensión $\vec{T}$. Una vez que se han representado estas fuerzas se selecciona una orientación conveniente para los ejes cartesianos respecto a los cuales se plantearán las componentes rectangulares de las fuerzas.



APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

➤ SITUACIONES DE EQUILIBRIO

Consideremos ahora situaciones en las cuales las fuerzas que actúan sobre un objeto se cancelan entre sí, cumpliendo con la primera ley de Newton. Ya que la fuerza neta es cero, no habrá aceleración y el objeto ha de estar o en reposo o en movimiento con velocidad constante.

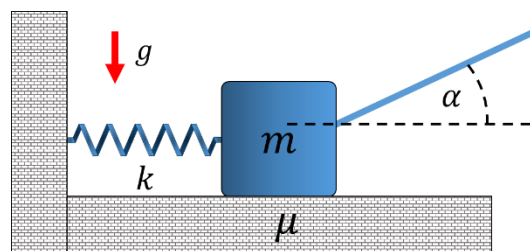
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

En términos de componentes cartesianas, se tiene:

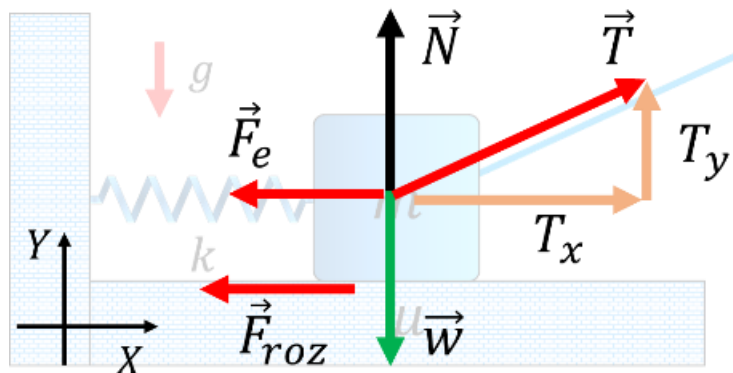
$$F_x = \sum_i F_{ix} = 0 \quad ; \quad F_y = \sum_i F_{iy} = 0$$

Ejemplo: Un bloque de masa $m = 5 \text{ kg}$ se encuentra sobre la superficie de un plano horizontal. El coeficiente de fricción estático entre el bloque y la superficie del plano es $\mu_s = 0,3$. Un resorte de constante de elasticidad $k = 50 \text{ N/m}$ se estira 7 cm al retener al bloque y se mantiene paralelo al plano, como se muestra en la figura. El bloque es tirado mediante una cuerda que se encuentra orientada a un ángulo $\alpha = 25^\circ$. Asuma que el bloque se encuentra en reposo a punto de moverse.

- Realice el DCL del objeto, es decir, dibuje las fuerzas que actúan sobre el bloque.
- Plantee las ecuaciones de equilibrio de fuerzas.
- Determine la magnitud de la tensión y de la fuerza normal, necesarias para que el bloque permanezca en reposo.



a)



b)

$$F_x = \sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow T_x - F_e - F_{roz} = 0$$

$$F_y = \sum_i F_{iy} = 0 \Rightarrow T_y + N - w = 0$$

El bloque está a punto de moverse, así que se encuentra en deslizamiento inminente, por lo tanto $F_{roz} = \mu_s N$.

$$T_x = T \cos \alpha ; T_y = T \sin \alpha ; F_e = kS ; F_{roz} = \mu_s N ; w = mg$$

$$T_x - F_e - F_{roz} = 0 \Rightarrow T \cos \alpha - kS - \mu_s N = 0$$

$$T_y + N - w = 0 \Rightarrow T \sin \alpha + N - mg = 0$$

c)

$$T \cos \alpha - kS - \mu_s N = 0 \quad (i)$$

$$T \sin \alpha + N - mg = 0 \quad (ii)$$

En (i):

$$T \cos 25^\circ - 50 * 7 * 10^{-2} - 0,3 * N = 0$$

En (ii):

$$T \sin 25^\circ + N - 5 * 9,81 = 0$$

Resolviendo y reordenando los términos, se tiene el sistema de ecuaciones:

De (i):

$$0,906308 * T - 0,3 * N = 3,5$$

De (ii):

$$0,422618 * T + N = 49,05$$

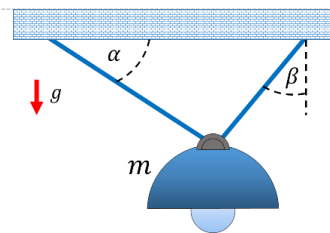
Coeficientes y solución:

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} T & N & c \\ 0,906308 & -0,3 & 3,5 \\ 0,422618 & 1 & 49,05 \end{array} \right\}$$

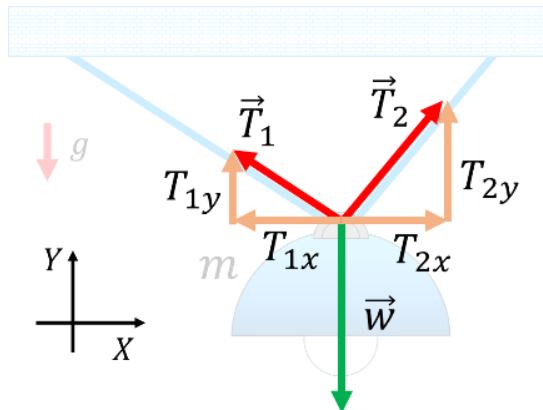
$$\Rightarrow T = 17,6315 \text{ [N]} ; N = 41,5986 \text{ [N]}$$

Ejemplo: Una lámpara de masa $m = 4 \text{ kg}$ se encuentra sostenida del techo por un sistema de cuerdas, que forman los ángulos $\alpha = 33^\circ$ y $\beta = 40^\circ$.

- Dibuje el DCL para la lámpara.
- Plantee el sistema de ecuaciones de equilibrio de fuerzas.
- Calcule la tensión de cada una de las cuerdas.



a)



b)

$$F_x = \sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow -T_{1x} + T_{2x} = 0$$

$$F_y = \sum_i F_{iy} = 0 \Rightarrow T_{1y} + T_{2y} - w = 0$$

$$T_{1x} = T_1 \cos \alpha ; T_{2x} = T_2 \sin \beta$$

$$T_{1y} = T_1 \sin \alpha ; T_{2y} = T_2 \cos \beta ; w = mg$$

$$-T_{1x} + T_{2x} = 0 \Rightarrow -T_1 \cos \alpha + T_2 \sin \beta = 0$$

$$T_{1y} + T_{2y} - w = 0 \Rightarrow T_1 \sin \alpha + T_2 \cos \beta - mg = 0$$

c)

$$-T_1 \cos \alpha + T_2 \sin \beta = 0 \quad (i)$$

$$T_1 \sin \alpha + T_2 \cos \beta - mg = 0 \quad (ii)$$

En (i):

$$-T_1 \cos 33^\circ + T_2 \sin 40^\circ = 0$$

En (ii):

$$T_1 \sin 33^\circ + T_2 \cos 40^\circ - 4 * 9,81 = 0$$

Resolviendo y ordenando los términos, se tiene el sistema de ecuaciones:

De (i):

$$-0,83867 * T_1 + 0,64279 * T_2 = 0$$

De (ii):

$$0,54464 * T_1 + 0,76604 * T_2 = 39,24$$

Coefficientes y solución:

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & c \\ -0,83867 & 0,64279 & 0 \\ 0,54464 & 0,76604 & 39,24 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow T_1 = 25,4125 \text{ [N]} ; T_2 = 33,1566 \text{ [N]}$$

Por Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\cos 33^\circ & \sin 40^\circ \\ \sin 33^\circ & \cos 40^\circ \end{vmatrix} =$$

$$= -\cos 33^\circ * \cos 40^\circ - \sin 40^\circ * \sin 33^\circ$$

$$= -0,99254$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & \sin 40^\circ \\ 39,24 & \cos 40^\circ \end{vmatrix} =$$

$$= 0 * \cos 40^\circ - \sin 40^\circ * 39,24$$

$$= -25,2231$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -\cos 33^\circ & 0 \\ \sin 33^\circ & 39,24 \end{vmatrix} =$$

$$= -\cos 33^\circ * 39,24 - 0 * \sin 33^\circ$$

$$= -32,9094$$

$$X = T_1 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-25,2231}{-0,99254} = 25,4125 \text{ [N]}$$

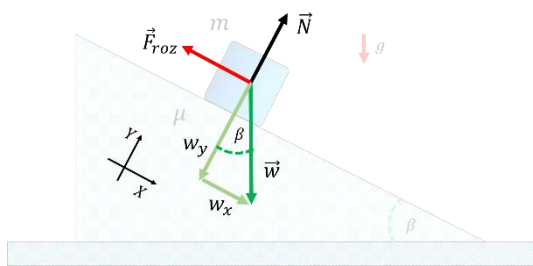
$$Y = T_2 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-32,9094}{-0,99254} = 33,1566 \text{ [N]}$$

$$\Rightarrow T_1 = 25,4125 \text{ [N]} ; T_2 = 33,1566 \text{ [N]}$$

Ejemplo: Un bloque de masa $m = 10\text{ kg}$ se encuentra en reposo sobre la superficie de un plano inclinado $\beta = 26^\circ$ respecto a la horizontal y a punto de deslizarse. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es μ_s .

- Realice el DCL de este bloque.
- Plantee las ecuaciones de equilibrio de fuerzas.
- Determine la magnitud de la fuerza normal y del coeficiente de rozamiento estático entre la superficie del plano y el bloque.

a)



El ángulo que forma el peso (vertical) con la perpendicular al plano inclinado, es el mismo ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal (ver figura abajo).

c)

$$mg \sin \beta - \mu_s N = 0 \quad (i)$$

$$N - mg \cos \beta = 0 \quad (ii)$$

En (i):

$$10 * 9,81 * \sin 26^\circ - \mu_s N = 0$$

En (ii):

$$N - 10 * 9,81 * \cos 26^\circ = 0$$

$$\Rightarrow N - 88,1717 = 0$$

b)

$$F_x = \sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow w_x - F_{roz} = 0$$

$$F_y = \sum_i F_{iy} = 0 \Rightarrow N - w_y = 0$$

El bloque se encuentra en deslizamiento inminente, por lo tanto se tiene que $F_{roz} = \mu_s N$.

$$w_x = w \sin \beta ; w_x = w \cos \beta ; w = mg ; F_{roz} = \mu_s N$$

$$w_x - F_{roz} = 0 \Rightarrow mg \sin \beta - \mu_s N = 0$$

$$N - w_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos \beta = 0$$

Resolviendo y ordenando los términos se tiene:

De (i):

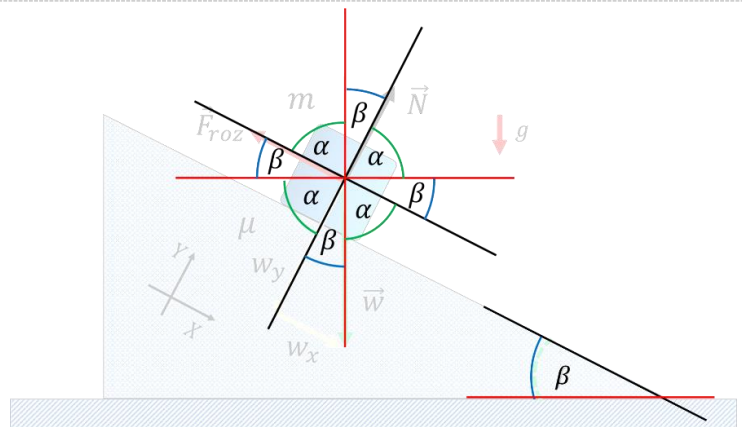
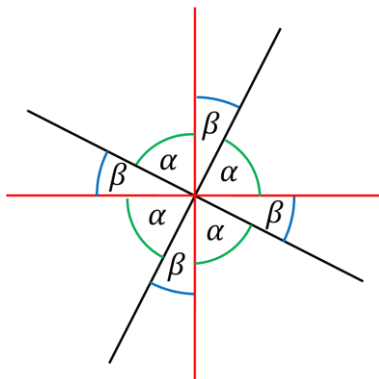
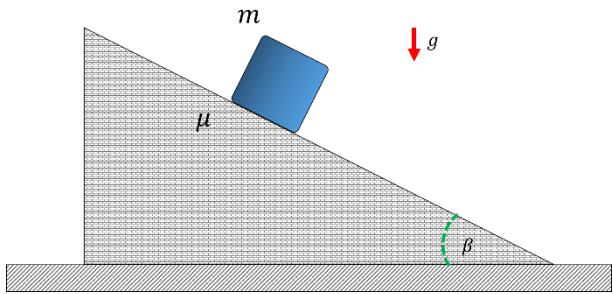
$$43,0042 - \mu_s N = 0$$

De (ii):

$$N = 88,1717 \text{ [N]}$$

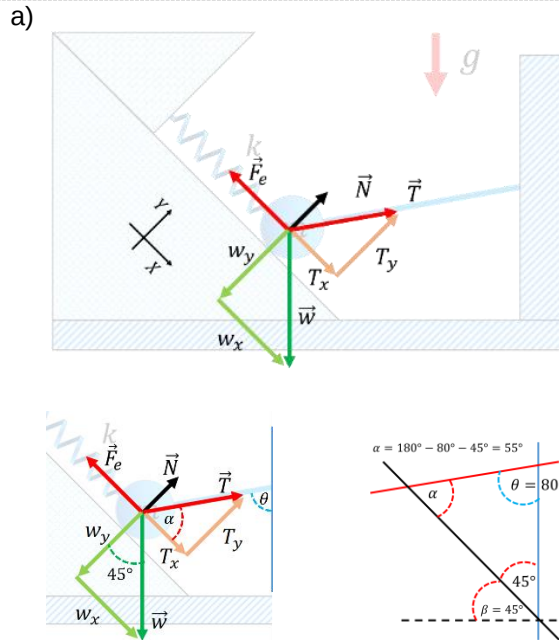
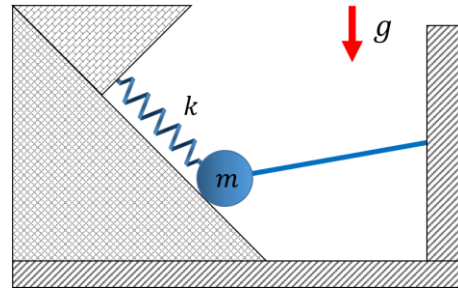
Entonces:

$$\mu_s = \frac{43,0042}{88,1717} = 0,4877$$



Ejemplo: Una esfera de masa $m = 5 \text{ kg}$ se encuentra sobre la superficie de un plano inclinado liso, sostenida por un resorte de constante de elasticidad $k = 250 \text{ N/m}$ y estirado 20 cm, y por una cuerda cuyo ángulo respecto a la vertical es $\theta = 80^\circ$. El ángulo de inclinación del plano es de 45° respecto a la horizontal.

- Dibuje el DCL para esta esfera.
- Plantee las ecuaciones de equilibrio para la esfera.
- Determine la fuerza normal y la tensión en la cuerda.



b)

$$F_x = \sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow T_x - F_e + w_x = 0$$

$$F_y = \sum_i F_{iy} = 0 \Rightarrow T_y + N - w_y = 0$$

$$T_x = T \cos \alpha ; T_y = T \sin \alpha ; F_e = kS ; w = mg$$

$$T_x - F_e + w_x = 0 \Rightarrow T \cos \alpha - kS + w \sin \beta = 0$$

$$T_y + N - w_y = 0 \Rightarrow T \sin \alpha + N - w \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow T \cos \alpha - kS + mg \sin \beta = 0$$

$$\Rightarrow T \sin \alpha + N - mg \cos \beta = 0$$

c)

$$T \cos \alpha - kS + mg \sin \beta = 0 \quad (i)$$

$$T \sin \alpha + N - mg \cos \beta = 0 \quad (ii)$$

En (i):

$$T \cos 55^\circ - 250 * 20 \times 10^{-2} + 5 * 9,81 * \sin 45^\circ = 0$$

En (ii):

$$T \sin 55^\circ + N - 5 * 9,81 * \cos 45^\circ = 0$$

Resolviendo y ordenando los términos:

De (i):

$$T = \frac{250 * 20 \times 10^{-2} - 5 * 9,81 * \sin 45^\circ}{\cos 55^\circ} = 26,7033 \text{ [N]}$$

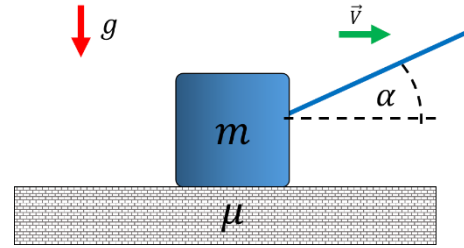
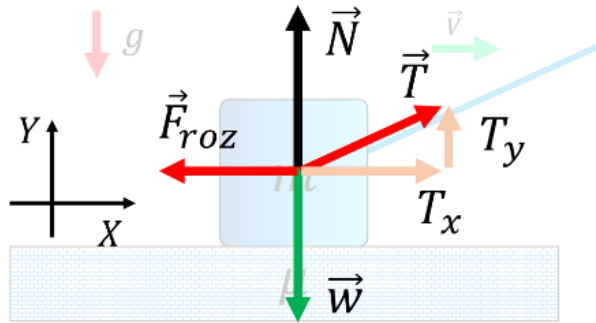
De (ii):

$$N = 5 * 9,81 * \cos 45^\circ - 26,7033 \sin 55^\circ = 12,8095 \text{ [N]}$$

Ejemplo: Un bloque de masa $m = 10 \text{ kg}$ se desliza con velocidad constante sobre la superficie de un plano horizontal con coeficiente fricción dinámico $\mu_d = 0,8$ y tirado por una cuerda, que forma un ángulo $\alpha = 25^\circ$ como se muestra en la figura.

- Realice el DCL para el bloque.
- Plantee las ecuaciones de equilibrio de fuerzas.
- Determine la tensión en la cuerda y la fuerza normal.

a)



b) A pesar de que el bloque se está moviendo, esta es una situación de equilibrio, ya que la velocidad del bloque se mantiene constante.

$$F_x = \sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow T_x - F_{roz} = 0$$

$$F_y = \sum_i F_{iy} = 0 \Rightarrow T_y + N - w = 0$$

El bloque está en movimiento, por lo tanto $F_{roz} = \mu_d N$.

$$T_x = T \cos \alpha ; T_y = T \sin \alpha ; F_{roz} = \mu_d N ; w = mg$$

$$T_x - F_{roz} = 0 \Rightarrow T \cos \alpha - \mu_d N = 0$$

$$T_y + N - w = 0 \Rightarrow T \sin \alpha + N - mg = 0$$

$$T \cos \alpha - \mu_d N = 0 \quad (i)$$

$$T \sin \alpha + N - mg = 0 \quad (ii)$$

En (i):

$$T \cos 25^\circ - 0,8 * N = 0$$

En (ii):

$$T \sin 25^\circ + N = 10 * 9,81$$

Resolviendo y reordenando los términos, se tiene el sistema de ecuaciones:

De (i):

$$0,906308 * T - 0,8 * N = 0$$

De (ii):

$$0,422618 * T + N = 98,1$$

Coeficientes y solución:

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} T & N & c \\ 0,906308 & -0,8 & 0 \\ 0,422618 & 1 & 98,1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow T = 63.0664 \text{ [N]} ; N = 71,447 \text{ [N]}$$

Por Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 25^\circ & -0,8 \\ \sin 25^\circ & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos 25^\circ * 1 - (-0,8 * \sin 25^\circ)$$

$$= 1,244402$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -0,8 \\ 98,1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 * 1 - (-0,8 * 98,1)$$

$$= 78,48$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \cos 25^\circ & 0 \\ \sin 25^\circ & 98,1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\cos 25^\circ * 98,1 - 0 * \sin 25^\circ$$

$$= 88,9088$$

$$X = T_1 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{78,48}{1,244402} = 63.0664 \text{ [N]}$$

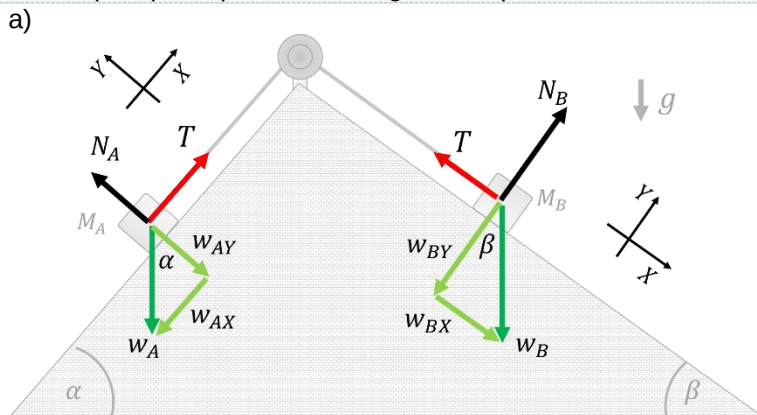
$$Y = T_2 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{88,9088}{1,244402} = 71,447 \text{ [N]}$$

$$\Rightarrow T_1 = 63.0664 \text{ [N]} ; T_2 = 71,447 \text{ [N]}$$

Ejemplo: Dos bloques A y B de masas M_A y M_B se encuentran en las superficies de las rampas inclinadas sin rozamiento como se muestra en la figura. Ambos bloques se hallan unidos mediante una cuerda ligera que pasa por una polea muy liviana y sin fricción.

Asumiendo que los bloques se encuentran en reposo, Determine:

- El diagrama de cuerpo libre de cada uno de los bloques.
- Las ecuaciones de equilibrio que relacionan las fuerzas de cada uno de los bloques.
- Determine la proporción que debe haber entre las masas de los bloques para que se mantengan en equilibrio.



b)

BLOQUE A

$$\sum F_X = T - w_{AX} = 0 \quad (i)$$

$$\sum F_Y = N_A - w_{AY} = 0 \quad (ii)$$

De (i):

$$T - M_A g \sin \alpha = 0$$

De (ii):

$$N_A - M_A g \cos \alpha = 0$$

BLOQUE B

$$\sum F_X = -T + w_{BX} = 0 \quad (iii)$$

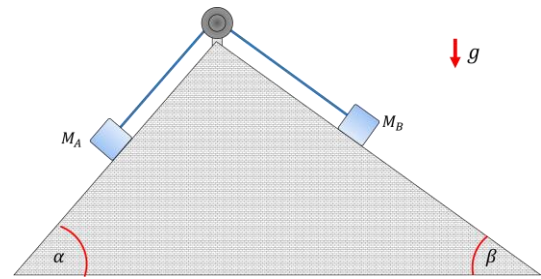
$$\sum F_Y = N_B - w_{BY} = 0 \quad (iv)$$

De (iii):

$$-T + M_B g \sin \beta = 0$$

De (iv):

$$N_B - M_B g \cos \beta = 0$$



- Si la masa del bloque A es $M_A = 2 \text{ kg}$ y los ángulos de inclinación son $\alpha = 50^\circ$ y $\beta = 35^\circ$, determine cuál debe ser la masa del bloque B para que el sistema se mantenga en reposo.

Entonces:

$$T - M_A g \sin \alpha = 0$$

$$-T + M_B g \sin \beta = 0$$

c) De este sistema de ecuaciones se tiene que:

$$T = M_A g \sin \alpha$$

$$T = M_B g \sin \beta$$

Por lo tanto:

$$M_A g \sin \alpha = M_B g \sin \beta$$

Entonces:

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

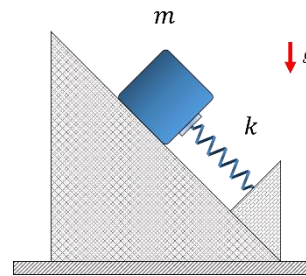
d)

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow M_B = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} M_A$$

$$M_B = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 35^\circ} 2 \Rightarrow M_B = 2,6711 \text{ kg}$$

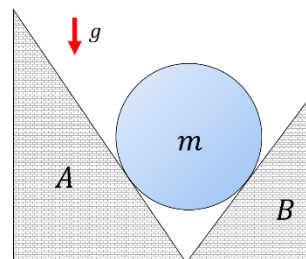
Ejercicio: Un bloque de masa $m = 15 \text{ kg}$ se encuentra sobre la superficie de un plano inclinado 45° sin fricción y soportado por un resorte de constante de elasticidad $k = 200 \text{ N/m}$ que se comprime al apoyar al bloque y se mantiene paralelo al plano, como se muestra en la figura.

- Dibuje las fuerzas que actúan sobre el bloque.
- Plantee el sistema de ecuaciones de equilibrio de fuerzas.
- Determine cuánto se comprime el resorte.



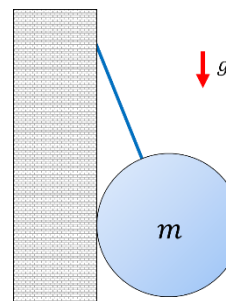
Ejercicio: Un monumento consiste de una esfera de masa $m = 1000 \text{ kg}$ soportada por dos planos inclinados A y B sin fricción, como se muestra en la figura.

- Dibuje las fuerzas que actúan sobre la esfera.
- Plantee las ecuaciones de equilibrio de fuerzas sobre la esfera.
- Determine la magnitud de las fuerzas normales que cada uno de los planos ejercen sobre la esfera.



Ejercicio: Una esfera de masa $m = 20 \text{ kg}$ se encuentra apoyada sobre la superficie de una pared que es un plano vertical liso y además es sostenida por una cuerda que forma un ángulo α con la vertical.

- Plantee el DCL para la esfera.
- Escriba las ecuaciones de equilibrio de fuerzas sobre la esfera.
- Determine la magnitud de la tensión en la cuerda y de la fuerza normal que ejerce la pared sobre la esfera.



APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

➤ SITUACIONES DE NO EQUILIBRIO

Consideremos ahora situaciones en las cuales las fuerzas que actúan sobre un objeto no se cancelan entre sí, cumpliendo con la segunda ley de Newton. Ya que la fuerza neta no es cero, habrá aceleración y el objeto ha de cambiar su estado de reposo o de movimiento con velocidad constante.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

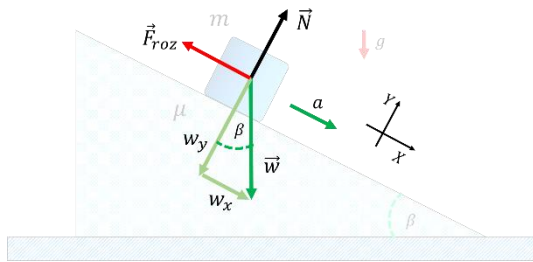
En términos de componentes cartesianas, se tiene:

$$F_x = \sum_i F_{ix} = ma_x \quad ; \quad F_y = \sum_i F_{iy} = ma_y$$

Ejemplo: Un bloque de masa $m = 10 \text{ kg}$ se encuentra sobre la superficie de un plano inclinado $\beta = 26^\circ$ respecto a la horizontal y desciende a lo largo del plano con una aceleración de 3 m/s^2 .

- Realice el DCL de este bloque.
- Plantee las ecuaciones de las componentes de las fuerzas y de la aceleración.
- Determine la magnitud de la fuerza normal y del coeficiente de rozamiento dinámico entre la superficie del plano y el bloque.

a)



El ángulo que forma el peso (vertical) con la perpendicular al plano inclinado, es el mismo ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal.

c)

$$mg \sin \beta - \mu_d N = ma \quad (i)$$

$$N - mg \cos \beta = 0 \quad (ii)$$

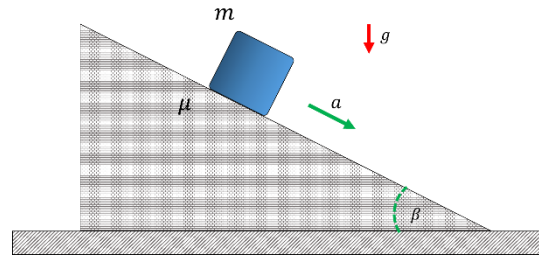
En (i):

$$10 * 9,81 * \sin 26^\circ - \mu_d N = ma$$

En (ii):

$$N - 10 * 9,81 * \cos 26^\circ = 0$$

$$\Rightarrow N - 88,1717 = 0$$



b)

$$F_x = \sum_i F_{ix} = ma_x \Rightarrow w_x - F_{roz} = ma_x$$

$$F_y = \sum_i F_{iy} = ma_y \Rightarrow N - w_y = ma_y$$

Ya que el bloque desliza a lo largo del plano, solo tendrá aceleración a lo largo del eje X:

$$w_x = w \sin \beta ; w_x = w \cos \beta ; w = mg ; F_{roz} = \mu_d N$$

$$w_x - F_{roz} = ma_x \Rightarrow mg \sin \beta - \mu_d N = ma$$

$$N - w_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos \beta = 0$$

Resolviendo y ordenando los términos se tiene:

De (i):

$$43,0042 - \mu_d N = 10 * 3$$

$$43,0042 - \mu_d N = 30 \Rightarrow \mu_d = \frac{43,0042 - 30}{N}$$

De (ii):

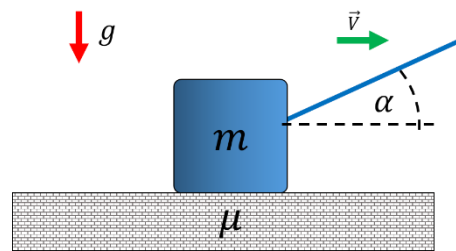
$$N = 88,1717 \text{ [N]}$$

Entonces:

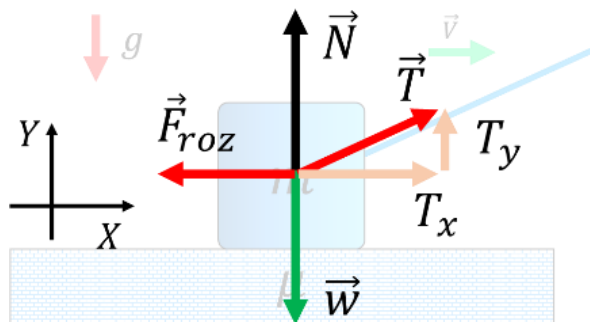
$$\mu_d = \frac{43,0042 - 30}{88,1717} = 0,1475$$

Ejemplo: Un bloque de masa $m = 10 \text{ kg}$ se desliza con aceleración constante de 6 m/s^2 a lo largo de la superficie de un plano horizontal con coeficiente fricción dinámico $\mu_d = 0,3$ y tirado por una cuerda, que forma un ángulo $\alpha = 25^\circ$ como se muestra en la figura.

- Realice el DCL para el bloque.
- Plantee las ecuaciones de las fuerzas y de la aceleración.
- Determine la tensión en la cuerda y la fuerza normal.



a)



b)

$$F_x = \sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow T_x - F_{roz} = ma_x$$

$$F_y = \sum_i F_{iy} = 0 \Rightarrow T_y + N - w = ma_y$$

El bloque está en movimiento, por lo tanto $F_{roz} = \mu_d N$. Como solo se desliza a lo largo del eje X, no tiene aceleración en Y.

$$T_x = T \cos \alpha ; T_y = T \sin \alpha ; F_{roz} = \mu_d N ; w = mg$$

$$T_x - F_{roz} = ma_x \Rightarrow T \cos \alpha - \mu_d N = ma$$

$$T_y + N - w = ma_y \Rightarrow T \sin \alpha + N - mg = 0$$

$$T \cos \alpha - \mu_d N = ma \quad (i)$$

$$T \sin \alpha + N - mg = 0 \quad (ii)$$

En (i):

$$T \cos 25^\circ - 0,3 * N = 10 * 6$$

En (ii):

$$T \sin 25^\circ + N = 10 * 9,81$$

Resolviendo y reordenando los términos, se tiene el sistema de ecuaciones:

De (i):

$$0,906308 * T - 0,3 * N = 60$$

De (ii):

$$0,422618 * T + N = 98,1$$

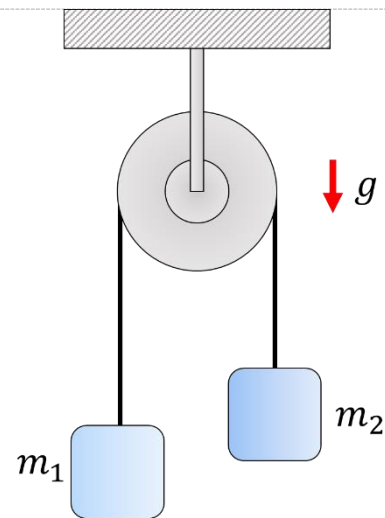
Coeficientes y solución:

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} T & N & c \\ 0,906308 & -0,3 & 60 \\ 0,422618 & 1 & 98,1 \end{array} \right\}$$

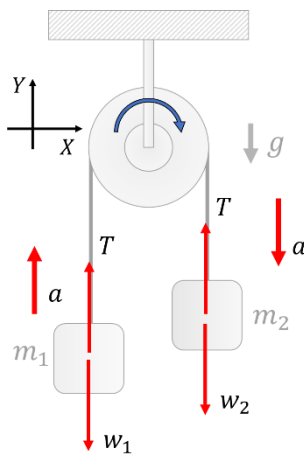
$$\Rightarrow T = 86,5653 \text{ [N]} ; N = 61,5159 \text{ [N]}$$

Ejemplo: La máquina de Atwood

Está conformada por una cuerda ligera que pasa por una polea sin fricción en su eje y de masa muy liviana. De los extremos de la cuerda se cuelgan dos masas m_1 y m_2 como se muestra en la figura. Determine la aceleración de las masas y la tensión en la cuerda.



Se realiza primero el DCL para cada bloque, asumiendo que el bloque 1 sube y el 2 baja:



Se plantean las ecuaciones de las fuerzas y la aceleración:

Para el bloque 1:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= T - w_1 = m_1 a \\ T - w_1 &= m_1 a \\ T - m_1 g &= m_1 a\end{aligned}$$

Para el bloque 2:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= T - w_2 = -m_2 a \\ T - w_2 &= -m_2 a \\ T - m_2 g &= -m_2 a\end{aligned}$$

Entonces:

$$T - m_1 a = m_1 g \quad (i)$$

$$T + m_2 a = m_2 g \quad (ii)$$

De (i):

$$T = m_1(g + a) \quad (iii)$$

En (ii):

$$\begin{aligned}m_1(g + a) + m_2 a &= m_2 g \\ m_1 g + m_1 a + m_2 a &= m_2 g \Rightarrow m_1 g + (m_1 + m_2)a = m_2 g \\ \Rightarrow a &= \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} g\end{aligned}$$

En (iii):

$$\begin{aligned}T &= m_1(g + a) = m_1 \left(g + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} g \right) \\ \Rightarrow T &= m_1 g \left(1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)\end{aligned}$$

Desarrollando se llega a:

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Si $m_2 > m_1 \Rightarrow a > 0$ el bloque de la derecha sube.

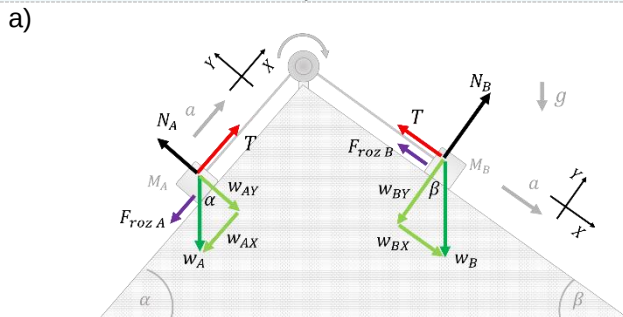
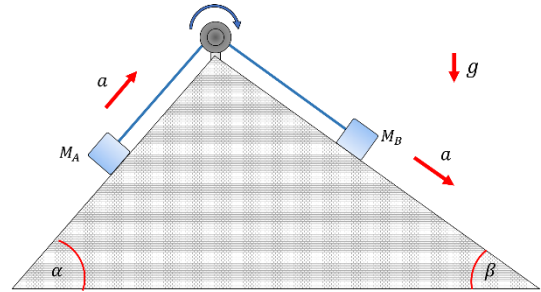
Si $m_2 < m_1 \Rightarrow a < 0$ el bloque de la derecha baja.

Si $m_2 = m_1 \Rightarrow a = 0$.

Ejemplo: Dos bloques A y B de masas M_A y M_B se encuentran en las superficies de las rampas inclinadas como se muestra en la figura. Ambos bloques se hallan unidos mediante una cuerda ligera que pasa por una polea muy liviana y sin fricción.

Asumiendo que el movimiento del sistema es tal que el bloque A asciende y el bloque B desciende, a lo largo de sus respectivos planos. Determine:

- El diagrama de cuerpo libre de cada uno de los bloques.
- Las ecuaciones que relacionan las fuerzas y la aceleración de cada uno de los bloques.
- Si la masa de los bloques es $M_A = 2 \text{ kg}$ y $M_B = 4 \text{ kg}$; los ángulos de inclinación son $\alpha = 50^\circ$ y $\beta = 35^\circ$ y los coeficientes de fricción dinámicos entre los bloques y las superficies son $\mu_{dA} = 0,3$ para el bloque A y $\mu_{dB} = 0,1$ para el bloque B, calcule los valores de la tensión en la cuerda y la aceleración de los bloques.



b)

BLOQUE A

$$\sum F_X = T - F_{roz A} - w_{AX} = M_A a \quad (i)$$

$$\sum F_Y = N_A - w_{AY} = 0 \quad (ii)$$

De (i):

$$T - \mu_{dA} N_A - M_A g \sin \alpha = M_A a$$

De (ii):

$$N_A - M_A g \cos \alpha = 0$$

BLOQUE B

$$\sum F_X = -T - F_{roz B} + w_{BX} = M_B a \quad (iii)$$

$$\sum F_Y = N_B - w_{BY} = 0 \quad (iv)$$

De (iii):

$$-T - \mu_{dB} N_B + M_B g \sin \beta = M_B a$$

De (iv):

$$N_B - M_B g \cos \beta = 0$$

De las ecuaciones para las componentes en Y:

$$N_A = M_A g \cos \alpha$$

$$N_B = M_B g \cos \beta$$

Entonces:

$$T - \mu_{dA} M_A g \cos \alpha - M_A g \sin \alpha = M_A a$$

$$-T - \mu_{dB} M_B g \cos \beta + M_B g \sin \beta = M_B a$$

c) Ordenando el sistema de ecuaciones:

$$T - M_A a = M_A g \sin \alpha + \mu_{dA} M_A g \cos \alpha$$

$$\Rightarrow T - M_A a = M_A g (\sin \alpha + \mu_{dA} \cos \alpha)$$

$$-T - M_B a = M_B g \sin \beta + \mu_{dB} M_B g \cos \beta$$

$$\Rightarrow -T - M_B a = M_B g (-\sin \beta + \mu_{dB} \cos \beta)$$

Reemplazando valores:

$$T - 2a = 2 * 9,81 (\sin 50^\circ + 0,3 * \cos 50^\circ)$$

$$T - 2a = 18,8132$$

$$-T - 4a = 4 * 9,81 (-\sin 35^\circ + 0,1 * \cos 35^\circ)$$

$$-T - 4a = -19,2928$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} T & a & c \\ 1 & -2 & 18,8132 \\ -1 & -4 & -19,2928 \end{array} \right]$$

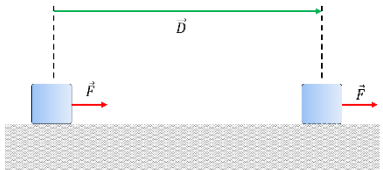
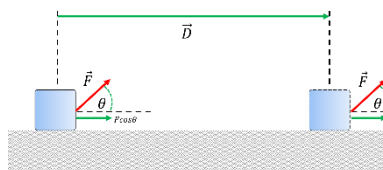
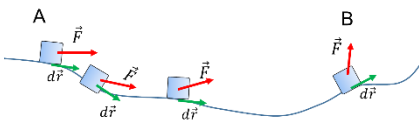
$$\Rightarrow T = 18,97309 \text{ N} ; a = 0,07992 \text{ m/s}^2$$

4. TRABAJO Y ENERGÍA

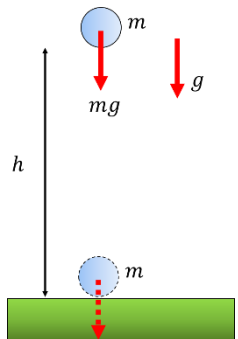
Las interacciones entre los cuerpos se pueden analizar mediante los conceptos de fuerza y de energía. Estos dos conceptos a su vez, se relacionan mediante el concepto de trabajo.

TRABAJO

Para definir lo que es el trabajo, consideremos tres situaciones:

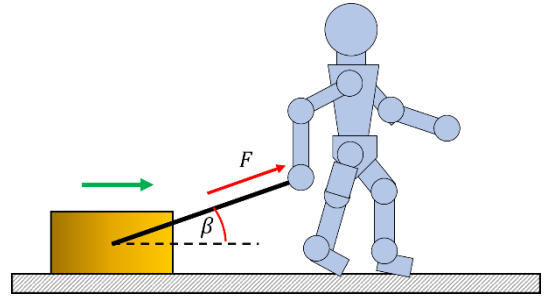
Caso 1) Fuerza constante paralela a una trayectoria recta		El trabajo W se define como el producto entre la fuerza y la distancia recorrida. $W = FD$
Caso 2) Fuerza constante no paralela a una trayectoria recta		El trabajo W se define como el producto entre la componente de la fuerza paralela a la trayectoria recorrida y la distancia. $W = F \cos \theta D$
Caso 3) Fuerza variable y trayectoria curva		El trabajo dW en una pequeña distancia de longitud dr se define como el producto entre la componente de la fuerza paralela al desplazamiento realizado y la distancia dr. $dW = F \cos \theta dr$ El trabajo total en toda la trayectoria es la suma de todos los diferenciales de trabajo dW en la trayectoria entre A y B. $W = \int_A^B F \cos \theta dr$

Nótese que las fuerzas que son perpendiculares a la trayectoria no realizan trabajo ya que en ese caso $\cos \theta = \cos 90^\circ = 0$.

Ejemplo: Calcular el trabajo que realiza la fuerza de gravedad sobre una esfera de masa m de 2 kg en caída libre, que impacta el suelo si se suelta desde una altura h de 5 m como se muestra en la figura. 	En este caso, al ser constante la masa y la aceleración de la gravedad, la fuerza, que es el peso, será constante. Además, el desplazamiento en la caída libre es paralelo a la fuerza. Por lo tanto, el trabajo será: $W = FD \quad ; \quad F = w = mg$ $W = mgD = 2 * 9,81 * 5 = 98,1 [J]$
--	--

Ejemplo: Un niño tira de su caja de juguetes de 1,5 kg y la arrastra por el piso plano horizontal de su patio de juegos. La fuerza que ejerce el niño es de 20 N y forma un ángulo β de 20° con la horizontal. Si la distancia recorrida es de 4 m, calcule:

- El trabajo que realiza el niño
- El trabajo que realiza el peso
- El trabajo que realiza la fuerza normal



a) En este caso la fuerza ejercida por el niño es constante, aunque no es paralela al desplazamiento realizado.

Por lo tanto, el trabajo será:

$$W = F \cos \theta D$$

El ángulo θ que forma la fuerza con la trayectoria es el mismo ángulo β dado en la figura

$$W = 20 * \cos 20^\circ * 4 = 32,65 [J]$$

b) En este caso el peso es constante, aunque no es paralelo al desplazamiento realizado, sino perpendicular a la trayectoria y por lo tanto $\theta = 90^\circ$

Por lo tanto, el trabajo será:

$$W = F \cos \theta D$$

$$W = mg \cos \theta D$$

$$W = 1,5 * 9,81 * \cos 90^\circ * 4 = 0 [J]$$

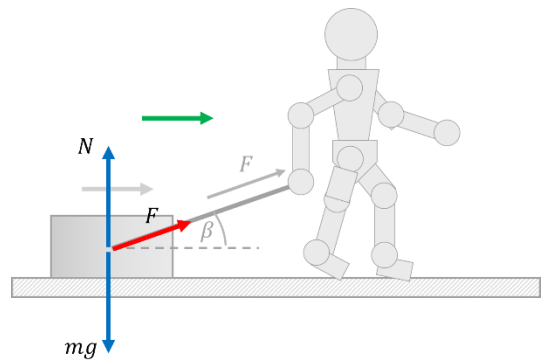
c) En este caso la normal es constante, aunque no es paralela al desplazamiento realizado, sino perpendicular a la trayectoria y por lo tanto $\theta = 90^\circ$

Por lo tanto, el trabajo será:

$$W = F \cos \theta D$$

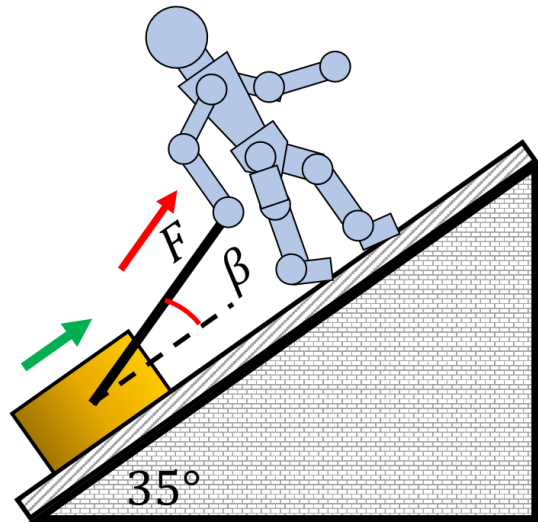
$$W = N \cos \theta D$$

$$W = N * \cos 90^\circ * 4 = 0 [J]$$



Ejemplo: Un niño tira de su caja de juguetes de 1,5 kg y la arrastra por el piso plano e inclinado un ángulo α de 35° de su patio de juegos. La fuerza que ejerce el niño es de 20 N y forma un ángulo β de 20° con la superficie del plano inclinado. Si la distancia recorrida es de 4 m, calcule:

- El trabajo que realiza el niño.
- El trabajo del peso de la caja.
- El trabajo de la fuerza normal.



a) En este caso la fuerza ejercida por el niño es constante, aunque no es paralela al desplazamiento realizado.

Por lo tanto, el trabajo será:

$$W = F \cos \theta D$$

El ángulo θ que forma la fuerza con la trayectoria es el mismo ángulo β dado en la figura

$$W = 20 * \cos 20^\circ * 4 = 75,1754 [J]$$

b) En este caso el peso es constante, aunque no es paralela al desplazamiento realizado. De la figura, se tiene que el ángulo θ que forma el peso con la dirección del desplazamiento es

$$\theta = 90^\circ + \alpha = 90^\circ + 35^\circ = 125^\circ$$

Por lo tanto, el trabajo será:

$$W = F \cos \theta D$$

$$W = mg \cos \theta D$$

$$W = 1,5 * 9,81 * \cos 125^\circ * 4 = -33,7607 [J]$$

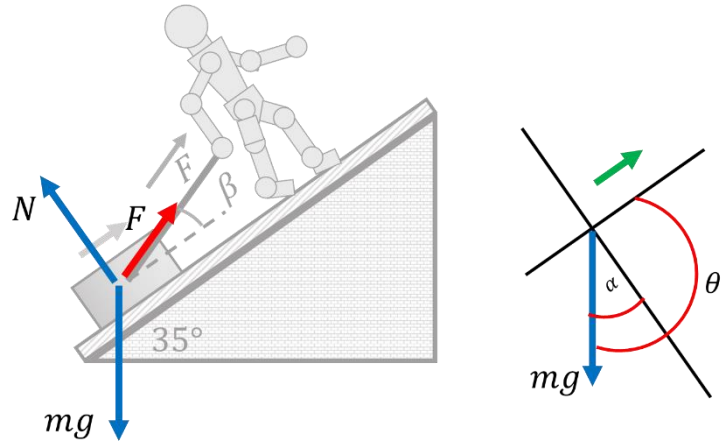
c) En este caso la normal es constante, aunque no es paralela al desplazamiento realizado, sino perpendicular a la trayectoria y por lo tanto $\theta = 90^\circ$

Por lo tanto, el trabajo será:

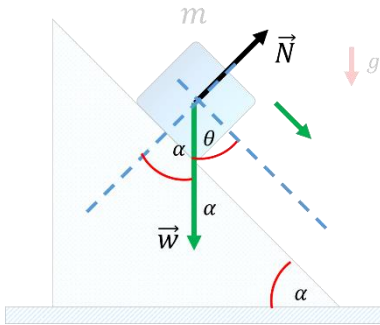
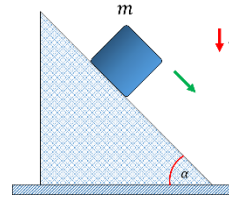
$$W = F \cos \theta D$$

$$W = N \cos \theta D$$

$$W = N * \cos 90^\circ * 4 = 0 [J]$$



Ejemplo: Un bloque de 3 kg se desliza 80 cm a lo largo de un plano inclinado 45° sin fricción. Determine el trabajo realizado por: a) el peso y b) la fuerza normal.



a) El peso no es paralelo al desplazamiento, pero es constante.

$$W = F \cos \theta D$$

$$W = mg \cos \theta D$$

La única componente del peso que realiza trabajo es la paralela al plano inclinado.

De la figura se tiene que:

$$\theta + \alpha = 90^\circ$$

$$\theta = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

El trabajo es entonces:

$$W = 3 * 9,81 * \cos 45^\circ * D$$

$$D = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m}$$

$$W = 3 * 9,81 * \cos 45^\circ * 0,8 = 16,6481 \text{ [J]}$$

b) La fuerza normal es perpendicular al plano y por lo tanto al desplazamiento, entonces, no realiza trabajo.

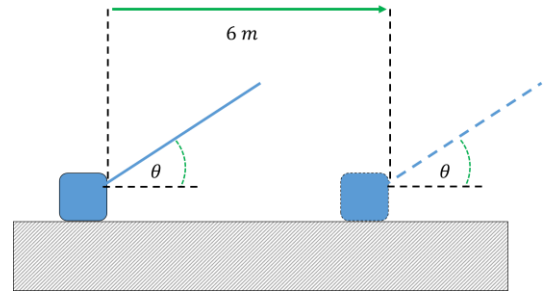
$$W = F \cos \theta D ; F = N ; \theta = 90^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = 0$$

$$W = N * \cos 90^\circ * 0,8 = 0 \text{ [J]}$$

Ejemplo: Un bloque de concreto de 200 kg es arrastrado una distancia recta de 6 m con un cable a lo largo de un terreno horizontal, mediante el cual se ejerce una tensión tal que el bloque se mueve con una aceleración de $0,1 \text{ m/s}^2$ como se muestra en la figura. Entre el bloque y el suelo hay un coeficiente de rozamiento dinámico de 0,8. El ángulo que forma el cable con la horizontal es de 33° .

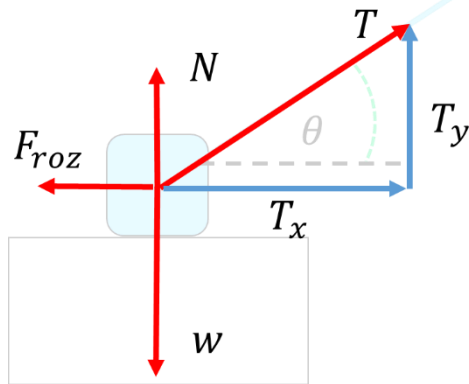
a) Determine los valores de la tensión de la cuerda y de la fuerza normal.

b) Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque.



Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

El peso, la normal, la tensión y la fuerza de rozamiento.



a) A partir del DCL:

$$\sum F_x = T_x - \mu N = ma$$

$$\sum F_y = T_y + N - w = 0$$

$$T \cos \theta - \mu N = ma$$

$$T \sin \theta + N = mg$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} T & N & C \\ \cos \theta & -\mu & ma \\ \sin \theta & 1 & mg \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} T & N & C \\ \cos 33^\circ & -0,8 & 200 * 0,1 \\ \sin 33^\circ & 1 & 200 * 9,81 \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T = 1247,35 \text{ [N]} \\ N = 1282,65 \text{ [N]} \end{array} \right.$$

Cada una de estas fuerzas es constante. El trabajo que cada una de ellas realiza es:

$$W = F \cos \theta D$$

Para el peso:

$$W_w = w * \cos 90^\circ * 6 = 0$$

Para la normal:

$$W_N = N * \cos 90^\circ * 6 = 0$$

Para la tensión:

$$W_T = 1247,35 * \cos 33^\circ * 6 = 6276,69 \text{ [J]}$$

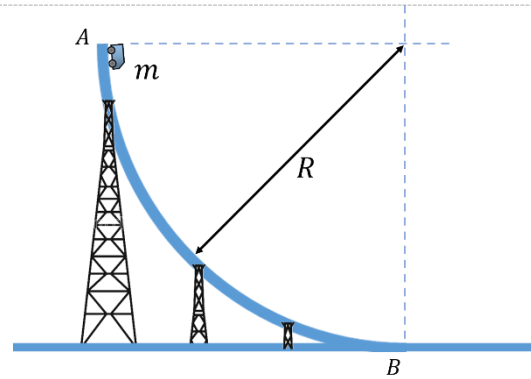
Para el rozamiento:

$$W_{roz} = F_{roz} * \cos 180^\circ * 6$$

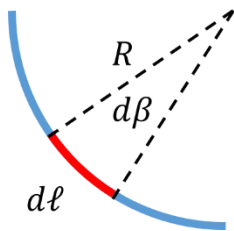
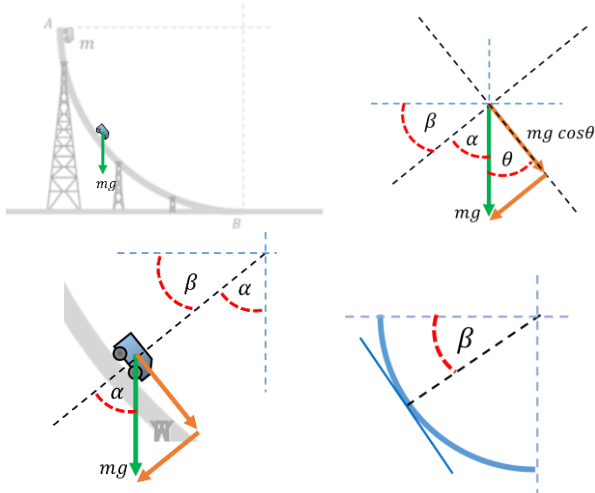
$$F_{roz} = \mu_d N$$

$$W_{roz} = 0,8 * 1282,65 * \cos 180^\circ * 6 = -6156,72 \text{ [J]}$$

Ejemplo: Una atracción mecánica consiste de un coche de 200 kg (con pasajeros) que desliza a lo largo de una pista que tiene forma de 1/4 de circunferencia cuyo radio es de 50 m. Calcule el trabajo que realiza la fuerza de gravedad a lo largo de la trayectoria de A a B.



En este caso el peso como tal es constante y vertical. Ya que la trayectoria es curva, el ángulo que forma el peso con la tangente a la trayectoria en cada punto de ésta varía:



$$W = \int_A^B F \cos \theta \, dr$$

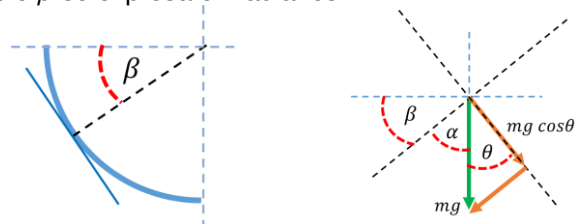
$$F = mg ; \quad dr = d\ell$$

$$dW = mg \cos \theta \, d\ell$$

$d\ell$ = diferencial de longitud de arco

$$d\ell = R \, d\beta$$

Donde el ángulo β se expresa en radianes.



$$W = \int_{\beta_A}^{\beta_B} mg \cos \theta \, R \, d\beta$$

De la figura: $\theta = \beta$ y por ende $d\beta = d\theta$

El ángulo θ varía desde la posición inicial A en la cual $\theta = 0^\circ = 0 \text{ rad}$ hasta la posición final B en la cual $\theta = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$. Por lo tanto:

$$W = \int_0^{\pi/2} mg \cos \theta \, R \, d\theta = mgR \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta ; \quad \int \cos \theta \, d\theta = \text{sen} \theta$$

$$W = mgR(\text{sen} \theta)|_0^{\pi/2} = mgR(1 - 0) = mgR$$

$$\Rightarrow W = mgR$$

Reemplazando valores:

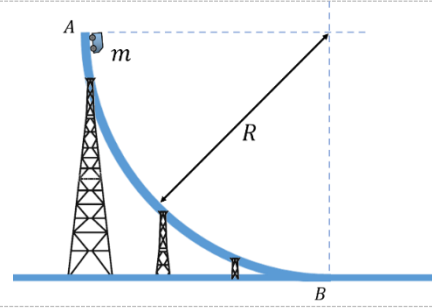
$$W = 200 * 9,81 * 50 = 98100 \text{ [J]}$$

Este resultado se puede generalizar para cualquier recorrido en un segmento de circunferencia comprendido entre dos ángulos

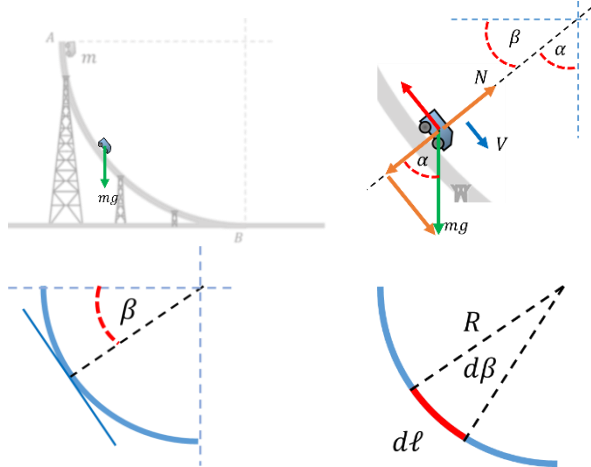
$$W = \int_{\theta_A}^{\theta_B} mg \cos \theta \, R \, d\theta$$

$$W = mgR \int_{\theta_A}^{\theta_B} \cos \theta \, d\theta \Rightarrow W = mgR(\text{sen} \theta_B - \text{sen} \theta_A)$$

Ejemplo: Una atracción mecánica consiste de un coche de 200 kg (con pasajeros) que desliza a lo largo de una pista que tiene forma de 1/4 de circunferencia cuyo radio es de 50 m. Calcule el trabajo que realiza la fuerza de fricción a lo largo de la trayectoria de A a B si el coeficiente de rozamiento dinámico entre la pista y el coche es $\mu_c = 0,4$



En este caso la fuerza de rozamiento es variable, ya que depende de la fuerza normal y a su vez la normal depende del ángulo de inclinación, el cual varía a lo largo de la trayectoria curva:



$$\sum F_y = N - mg \cos \alpha = 0$$

$$N = mg \cos \alpha$$

$$F_{roz} = \mu_c N \Rightarrow F_{roz} = \mu_c mg \cos \alpha$$

Ya que $\alpha + \beta = 90^\circ$ entonces

$$\cos \alpha = \cos(90 - \beta) = \sin \beta$$

Por ende:

$$F_{roz} = \mu_c mg \sin \beta$$

$$W = \int_A^B F \cos \theta \, dr$$

$$F = F_{roz} = \mu_c mg \sin \beta$$

Ya que esta fuerza es opuesta al desplazamiento, entonces:

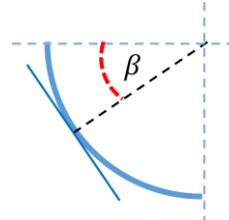
$$\theta = 180^\circ \Rightarrow \cos \theta = -1$$

$$W = \int_A^B \mu_c mg \sin \beta (-1) \, d\ell$$

$d\ell$ = diferencial de longitud de arco

$$d\ell = R \, d\beta$$

Donde el ángulo β se expresa en radianes.



$$W = - \int_{\beta_A}^{\beta_B} \mu_c mg \sin \beta \, R \, d\beta$$

El ángulo β varía desde la posición inicial A en la cual $\beta = 0^\circ = 0 \text{ rad}$ hasta la posición final B en la cual $\beta = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$. Por lo tanto:

$$W = - \int_0^{\pi/2} \mu_c mg \sin \beta \, R \, d\beta$$

$$= -\mu_c mg R \int_0^{\pi/2} \sin \beta \, d\beta \quad ; \quad \int \sin \beta \, d\beta = -\cos \beta$$

$$W = -\mu_c mg R (-\cos \beta)|_0^{\pi/2} = \mu_c mg R (0 - 1) = -\mu_c mg R$$

$$\Rightarrow W = -\mu_c mg R$$

Reemplazando valores:

$$W = -0,4 * 200 * 9,81 * 50 = -39240 \text{ [J]}$$

Este resultado se puede generalizar para cualquier recorrido en un segmento de circunferencia comprendido entre dos ángulos

$$W = - \int_{\beta_A}^{\beta_B} \mu_c mg \sin \beta \, R \, d\beta$$

$$W = -\mu_c mg R \int_{\beta_A}^{\beta_B} \sin \beta \, d\beta \Rightarrow W = \mu_c mg R (\cos \beta_B - \cos \beta_A)$$

Ejemplo: Un estudiante ha diseñado un mecanismo que va a ser empleado en una construcción para desplazar bloques pesados. Consiste de una cuerda que pasa por una polea. Un extremo de la cuerda se une al bloque y en el otro extremo se aplica una tensión de magnitud constante T . Como consecuencia, el bloque se desplaza de A a B a lo largo de una superficie horizontal con fricción despreciable.

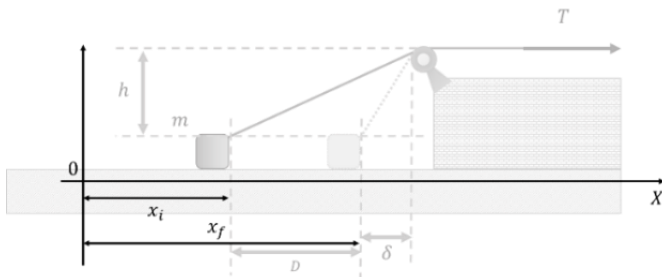
a) Determine el trabajo realizado por una tensión de 500 N para mover al bloque entre estos dos puntos, si la masa del bloque es de 100 kg y las distancias son $h = 7 \text{ m}$; $D = 11 \text{ m}$; $\delta = 4,4 \text{ m}$.

a) En este caso la magnitud de la fuerza es constante y la trayectoria es rectilínea, pero el ángulo que forma la fuerza con la trayectoria varía.

Por lo tanto, el trabajo será:

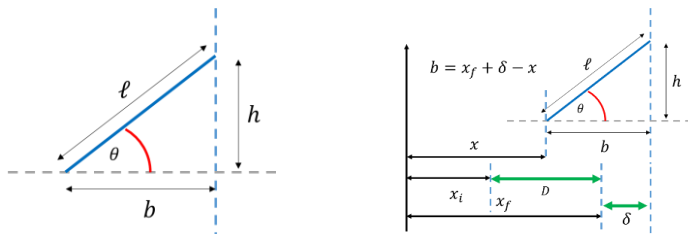
$$W = \int_A^B F \cos \theta \, dr$$

$$W = \int_A^B T \cos \theta \, dx = T \int_A^B \cos \theta \, dx$$



$$W = T \int_{x_i}^{x_f} \cos \theta \, dx$$

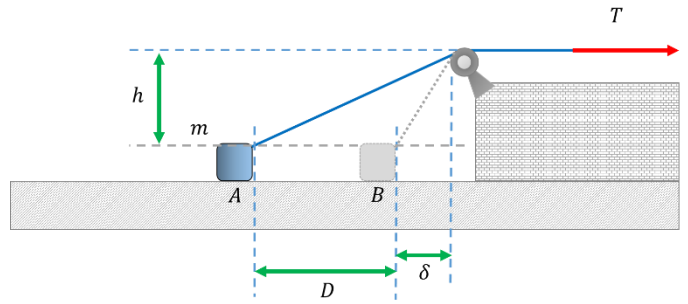
Se debe encontrar la relación entre $\cos \theta$ y dx :



De la figura, la longitud de la cuerda ℓ la altura h y la distancia horizontal b se relacionan mediante:

$$\ell^2 = b^2 + h^2$$

$$2\ell \, d\ell = 2b \, db \quad ; \quad \frac{d\ell}{db} = \frac{b}{\ell} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \cos \theta$$



$$b = x_f + \delta - x$$

$$\cos \theta = \frac{b}{\ell} = \frac{x_f + \delta - x}{\sqrt{(x_f + \delta - x)^2 + h^2}}$$

$$W = T \int_{x_i}^{x_f} \frac{x_f + \delta - x}{\sqrt{(x_f + \delta - x)^2 + h^2}} \, dx$$

Usando la variable b :

$$b = x_f + \delta - x \quad ; \quad db = -dx$$

$$b_i = x_f + \delta - x_i = D + \delta$$

$$b_f = x_f + \delta - x_f = \delta$$

$$W = T \int_{b_i}^{b_f} \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} (-db) = -T \int_{D+\delta}^{\delta} \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} \, db$$

De cálculo:

$$\int \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \sqrt{b^2 + h^2}$$

Entonces:

$$W = -T \left(\sqrt{b^2 + h^2} \right) \Big|_{D+\delta}^{\delta}$$

$$W = -T \left(\sqrt{\delta^2 + h^2} - \sqrt{(D+\delta)^2 + h^2} \right)$$

$$W = T \left(\sqrt{(D+\delta)^2 + h^2} - \sqrt{\delta^2 + h^2} \right)$$

Reemplazando valores:

$$W = 500 * \left(\sqrt{(11+4,4)^2 + 7^2} - \sqrt{4,4^2 + 7^2} \right) \approx 4324,13 \text{ [J]}$$

$$\text{b) } W = \Delta E_c = \frac{1}{2} m V_B^2 - 0$$

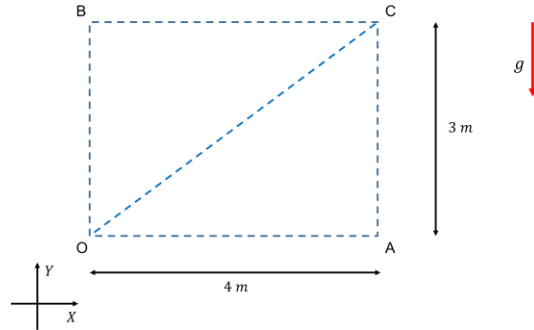
$$\Rightarrow V_B = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 * 4324,13}{100}} \approx 9,3 \text{ m/s}$$

FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

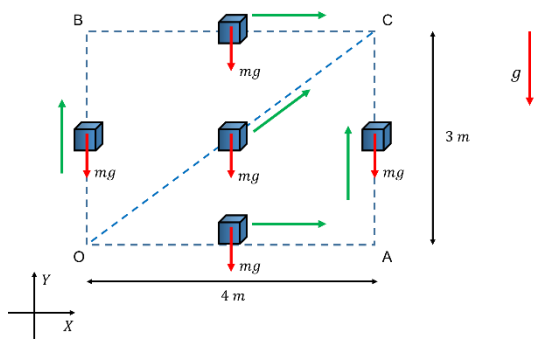
Existen fuerzas para las cuales el trabajo depende solamente de los puntos de partida y de llegada, sin importar la trayectoria recorrida entre los puntos inicial y final. Se dice entonces que estas fuerzas son conservativas y no disipan energía mecánica. Para las fuerzas en las cuales el trabajo depende de la trayectoria, se denominan como no conservativas y transforman la energía mecánica en otros tipos de energía como calor, sonido, etc.

Ejemplo: Calcule el trabajo que realiza la fuerza de gravedad cuando se desplaza un bloque de 10 kg si se realizan las siguientes trayectorias ubicadas en el plano vertical:

- a) OA
- b) AC
- c) OAC
- d) OB
- e) BC
- f) OBC
- g) OC



En estos casos la fuerza es constante y mantiene constante el ángulo respecto a la trayectoria rectilínea en cada caso.

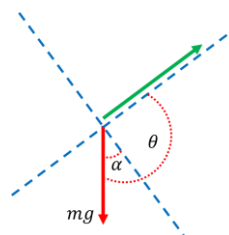


$$W = F \cos \theta D ; F = mg$$

- a) $W_{OA} = mg \cos \theta D = 10 * 9,81 * \cos 90^\circ * 4 = 0$
- b) $W_{AC} = mg \cos \theta D = 10 * 9,81 * \cos 180^\circ * 3 = -294,3 J$
- c) $W_{OAC} = W_{OA} + W_{AC} = 0 + (-294,3) = -294,3 J$

- d) $W_{OB} = mg \cos \theta D = 10 * 9,81 * \cos 180^\circ * 3 = -294,3 J$
- e) $W_{BC} = mg \cos \theta D = 10 * 9,81 * \cos 90^\circ * 4 = 0 J$
- f) $W_{OBC} = W_{OB} + W_{BC} = (-294,3) + 0 = -294,3 J$
- g) $W_{OC} = mg \cos \theta D = 10 * 9,81 * \cos \theta * D$

A lo largo de OC el ángulo entre el peso y esta recta es:



$\theta = 90^\circ + \alpha$ donde el ángulo α se obtiene como:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36,8699^\circ$$

$$\theta = 90^\circ + 36,8699^\circ = 126,8699^\circ$$

Y la distancia $D = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 m$

Entonces:

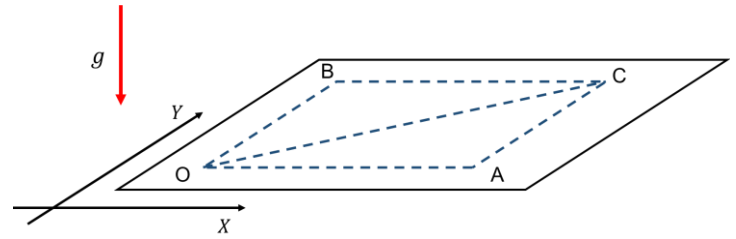
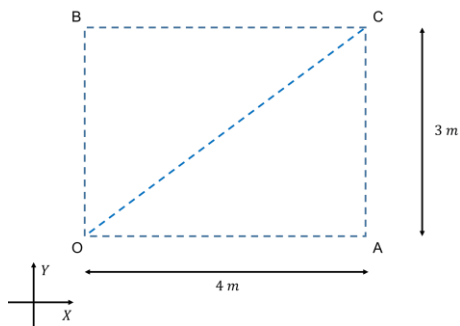
$$W_{OC} = 10 * 9,81 \cos \theta D = 10 * 9,81 * \cos 126,8699^\circ * 5$$

$$W_{OC} = -294,30 J$$

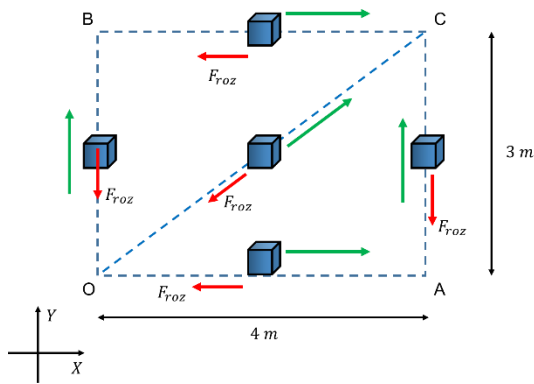
Nótese en este caso, que el trabajo que realiza la fuerza de gravedad entre los puntos O y C es independiente de las trayectorias seguidas, ya sea OAC, OBC u OC. El trabajo es siempre el mismo. La fuerza de gravedad es entonces una fuerza conservativa. Este resultado realmente se cumple para cualquier trayectoria curva o recta entre O y C.

Ejemplo: Calcule el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento con un coeficiente de rozamiento cinético de 0,9, cuando se desliza a un bloque de 10 kg en una superficie horizontal, por la acción de una fuerza que es paralela al plano XY, si se realizan las siguientes trayectorias:

- OA
- AC
- OAC
- OB
- BC
- OBC
- OC



En estos casos la fuerza es constante y mantiene constante el ángulo respecto a la trayectoria rectilínea en cada caso.



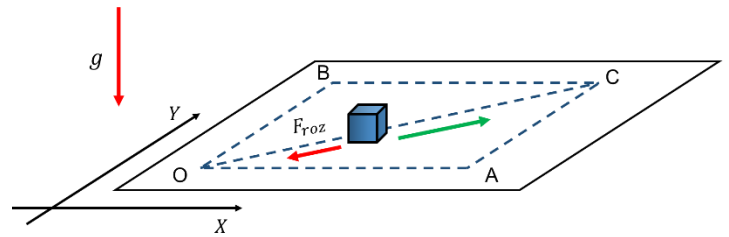
$$W = F \cos \theta D ; F = F_{roz} = \mu_c N$$

Ya que la superficie es horizontal, en ausencia de otras fuerzas verticales, se tiene que la fuerza normal es igual al peso. $N = mg$. A su vez, el ángulo entre esta fuerza y la trayectoria seguida es de 180° :

$$F_{roz} = \mu_c N = \mu_c mg$$

$$W = \mu_c mg \cos 180^\circ D = -\mu_c mg D$$

- $W_{OA} = -\mu_c mg D = -0,9 * 10 * 9,81 * 4 = -353,16 J$
- $W_{AC} = -\mu_c mg D = -0,9 * 10 * 9,81 * 3 = -264,87 J$
- $W_{OAC} = W_{OA} + W_{AC} = -353,16 + (-264,87) = -618,03 J$



- $W_{OB} = -\mu_c mg D = -0,9 * 10 * 9,81 * 3 = -264,87 J$
- $W_{BC} = -\mu_c mg D = -0,9 * 10 * 9,81 * 4 = -353,16 J$
- $W_{OBC} = W_{OB} + W_{BC} = -264,87 + (-353,16) = -618,03 J$
- $W_{OC} = -\mu_c mg D = -0,9 * 10 * 9,81 * D$

La distancia D se obtiene como

$$D = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 m$$

Por lo tanto:

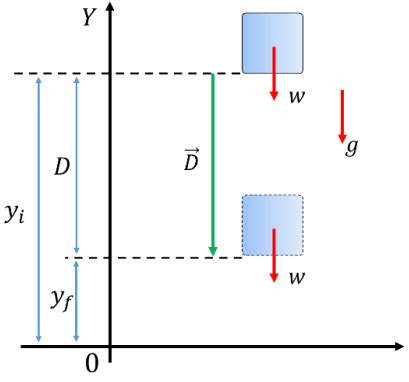
$$W_{OC} = -0,9 * 10 * 9,81 * 5 = -441,45 J$$

Nótese en este caso, que el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento entre los puntos O y C es dependiente de las trayectorias seguidas, ya sea OAC, OBC u OC. El trabajo no siempre es el mismo. La fuerza de rozamiento es entonces una fuerza no conservativa. Este resultado realmente se cumple para cualquier trayectoria curva o recta entre O y C.

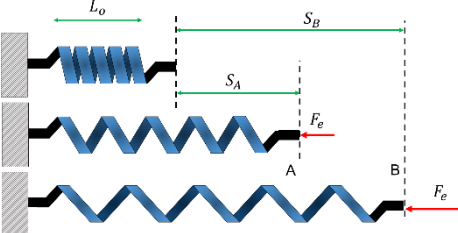
ENERGÍA POTENCIAL

Consideremos las siguientes situaciones que relacionan la fuerza con el desplazamiento.

TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE GRAVEDAD.

 En este caso la fuerza es el peso, que es constante y paralelo al desplazamiento realizado de manera vertical. $W = FD ; F = w$	Entonces: $W = wD ; w = mg$ $W = mgD ; D = y_i - y_f$ $W = mg(y_i - y_f)$ $W = mgy_i - mgy_f$	Se tiene que el trabajo es la diferencia entre una cantidad inicial y una final $W = mgy_i - mgy_f$ Se define como energía potencial gravitacional la cantidad $E_{pg} = mgy$ Entonces: $W = E_{pgi} - E_{pgf}$ Ya que $\Delta E_{pg} = E_{pgf} - E_{pgi}$ Entonces $W = -\Delta E_{pg}$
---	--	---

TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA ELÁSTICA.

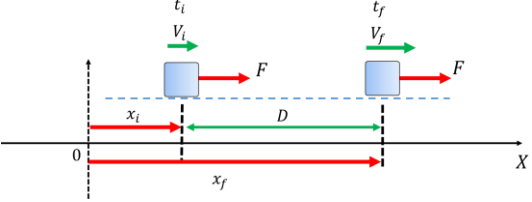
 En este caso la fuerza depende de la elongación del resorte y por lo tanto no será constante a medida que éste se va deformando. Pero será antiparalela al desplazamiento. $W = \int_A^B F \cos \theta \, dr ; F = kS, dr = dS$	$W = \int_A^B F \cos \theta \, dr ; F = kS, dr = dS$ Ya que la fuerza es opuesta al desplazamiento: $\theta = 180^\circ \Rightarrow \cos \theta = -1$ $W = \int_{S_A}^{S_B} kS \cos \theta \, ds = -k \int_{S_i}^{S_f} S \, ds$ Entonces: $W = -k \int_{S_i}^{S_f} S \, ds$ Esta integral es de la forma: $\int x \, dx = \frac{1}{2} x^2$ Entonces: $W = -\frac{1}{2} kS^2 \Big _{S_i}^{S_f} = -\frac{1}{2} kS_f^2 - \left(-\frac{1}{2} kS_i^2 \right)$ $W = \frac{1}{2} kS_i^2 - \frac{1}{2} kS_f^2$	Se tiene que el trabajo es la diferencia entre una cantidad inicial y una final $W = \frac{1}{2} kS_i^2 - \frac{1}{2} kS_f^2$ Se define como energía potencial elástica $E_{pe} = \frac{1}{2} kS^2$ Entonces: $W = E_{pei} - E_{pef}$ Ya que $\Delta E_{pe} = E_{pef} - E_{pei}$ Entonces $W = -\Delta E_{pe}$
---	---	---

De estas dos situaciones tenemos un resultado en común y que realmente se cumple en general cuando relacionamos cualquier energía potencial E_p con el trabajo W : $W = -\Delta E_p$

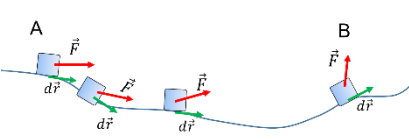
ENERGÍA CINÉTICA

Consideremos la siguiente situación que relaciona la fuerza con la velocidad.

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE EN UNA TRAYECTORIA RECTA.

 En este caso la fuerza es constante y paralela al desplazamiento realizado. Por la segunda ley de Newton, producirá una aceleración: $F = ma$ $W = FD ; F = ma$	Entonces: $W = maD$ $W = maD ; D = x_f - x_i$ $W = ma(x_f - x_i)$ De cinemática, al ser un MRUA se tiene que: $V_f^2 = V_i^2 + 2a(x_f - x_i)$ $\Rightarrow a(x_f - x_i) = \frac{V_f^2 - V_i^2}{2}$ Entonces. $W = m \frac{V_f^2 - V_i^2}{2}$ $W = \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{1}{2} m V_i^2$	Se tiene que el trabajo es la diferencia entre una cantidad final y una inicial $W = \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{1}{2} m V_i^2$ Se define como energía cinética a la cantidad $E_c = \frac{1}{2} m V^2$ Entonces: $W = E_{cf} - E_{ci}$ Ya que $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$ Entonces $W = \Delta E_c$
---	---	--

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE EN UNA TRAYECTORIA CURVA.

 En este caso la fuerza es variable y la trayectoria curvilínea: $F = ma$ $W = \int_A^B ma \cos\theta dr$ $a = \frac{dV}{dt}$ $W = \int_A^B m \frac{dV}{dt} \cos\theta dr$ $W = \int_{V_i}^{V_f} m dV \cos\theta \frac{dr}{dt}$	$V = \frac{dr}{dt}$ $W = \int_{V_i}^{V_f} m V dV \cos\theta$ $V dV \cos\theta = V_x dV_x + V_y dV_y + V_z dV_z \quad (*)$ $W = \int_{V_i}^{V_f} m (V_x dV_x + V_y dV_y + V_z dV_z)$ $W = m \left(\int_{V_i}^{V_f} V_x dV_x + \int_{V_i}^{V_f} V_y dV_y + \int_{V_i}^{V_f} V_z dV_z \right)$ $W = m \left(\frac{1}{2} V_{fx}^2 + \frac{1}{2} V_{fy}^2 + \frac{1}{2} V_{fz}^2 - \left(\frac{1}{2} V_{ix}^2 + \frac{1}{2} V_{iy}^2 + \frac{1}{2} V_{iz}^2 \right) \right)$ $W = \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{1}{2} m V_i^2$ (*) Esta igualdad es de la definición de producto punto.	Se tiene que el trabajo es la diferencia entre una cantidad final y una inicial $W = \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{1}{2} m V_i^2$ Se define como energía cinética a la cantidad $E_c = \frac{1}{2} m V^2$ Entonces: $W = E_{cf} - E_{ci}$ Ya que $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$ Entonces $W = \Delta E_c$ Es el mismo resultado que en el caso anterior.
--	--	--

De estas dos situaciones tenemos un resultado en común y que realmente se cumple en general cuando relacionamos cualquier energía cinética E_c con el trabajo W : $W = \Delta E_c$

En síntesis:

Fuerza y energía son conceptos útiles para describir las interacciones entre los objetos.

La fuerza es una cantidad vectorial mientras que la energía es una cantidad escalar.

El concepto de trabajo relaciona a los conceptos de fuerza y energía.

La energía potencial es aquella que está “almacenada” y solo depende de la posición del objeto respecto a un punto de referencia.

La energía cinética es aquella que depende de la velocidad del objeto.

ENERGÍA MECÁNICA

Es la suma de las energías cinética y potencial

La energía potencial es

$$E_p = E_{pg} + E_{pe}$$

La energía mecánica es entonces:

$$E_M = E_p + E_c$$

El cambio de energía mecánica es:

$$\Delta E_M = \Delta E_p + \Delta E_c$$

Pero:

$$\Delta E_p = -W \quad ; \quad \Delta E_c = W$$

Entonces:

$$\Delta E_M = -W + W = 0$$

Por lo tanto, la energía mecánica es constante.

De este resultado se deduce la relación entre la energía mecánica inicial y la energía mecánica final

$$\Delta E_p + \Delta E_c = 0 \Rightarrow E_{pf} - E_{pi} + E_{cf} - E_{ci} = 0 \Rightarrow -(E_{pi} + E_{ci}) + (E_{pf} + E_{cf}) = 0 \Rightarrow E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf}$$

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf}$$

$$E_{Mi} = E_{pi} + E_{ci}$$

$$E_{Mf} = E_{pf} + E_{cf}$$

$$E_{Mi} = E_{Mf}$$

Es decir, la energía mecánica final es igual a la energía mecánica inicial. Esto es el principio de conservación de la energía.

Nótese que para la deducción de este resultado no se ha tenido en cuenta efectos de las fuerzas disipativas como el rozamiento.

Si hay presencia de fuerza de fuerzas disipativas (llamadas también fuerzas no conservativas), como el rozamiento, el arrastre aerodinámico, fuerzas de viscosidad, etc. el trabajo de estas fuerzas hace que la energía mecánica no se conserve y se transforme en otros tipos de energía como calor o sonido.

El trabajo de estas fuerzas disipativas o no conservativas, se denota como W_{NC} y entonces el cambio de energía mecánica es:

$$\Delta E_M = -W + W + W_{NC} = 0 + W_{NC} = W_{NC}$$

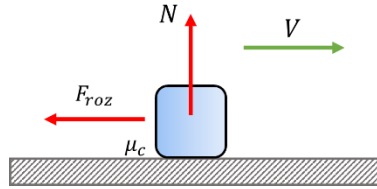
$$\Delta E_M = E_{Mf} - E_{Mi} = W_{NC}$$

$$\Rightarrow E_{Mf} - E_{Mi} = W_{NC} \Rightarrow E_{Mi} = E_{Mf} - W_{NC}$$

En el caso de la fuerza de rozamiento, el trabajo W_{NC} será

$$W_{NC} = F_{roz} \cos \theta D$$

En este caso, el rozamiento es cinético, entonces la fuerza será $F_{roz} = \mu_c N$, donde μ_c es el coeficiente de rozamiento cinético entre el objeto y la superficie sobre la cual se desliza.



Ya que la fuerza de rozamiento es tangente a la superficie de contacto y opuesta al desplazamiento, el ángulo entre esta fuerza y el desplazamiento es $\theta = 180^\circ$ por lo tanto $\cos \theta = \cos 180^\circ = -1$

Entonces:

$$W_{NC} = \mu_c N * (-1) * D$$

$$\Rightarrow W_{NC} = -\mu_c N D$$

Por lo tanto:

$$E_{Mi} = E_{Mf} - W_{NC} = E_{Mf} - (-\mu_c N D)$$

$$\Rightarrow E_{Mi} = E_{Mf} + \mu_c N D$$

Si denotamos el segundo término a la derecha de la igualdad, la *energía perdida por rozamiento*, como $\mathbb{W}_{roz} = \mu_c N D$ entonces tenemos que

$$E_{Mi} = E_{Mf} + \mathbb{W}_{roz}$$

Que se puede interpretar como el hecho de que la energía mecánica inicial se distribuye en una parte de energía mecánica final y en otra parte de energía que se disipa por rozamiento.

En general la energía perdida por el trabajo de fuerzas no conservativas $\mathbb{W}_{NC}$ (no solo rozamiento por deslizamiento sino arrastre aerodinámico, viscosidad, etc) se incluye en la ley de conservación de la energía como:

$$E_{Mi} = E_{Mf} + \mathbb{W}_{NC}$$

En resumen:

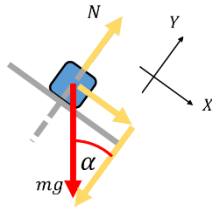
TRABAJO	Trabajo realizado por una fuerza constante en una trayectoria recta. Fuerza paralela a la trayectoria.	$W = FD$
	Trabajo realizado por una fuerza constante en una trayectoria recta. Fuerza oblicua a la trayectoria.	$W = F \cos \theta D$
	Trabajo realizado por una fuerza variable en una trayectoria curva.	$W = \int_A^B F \cos \theta dr$
ENERGÍA	ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL	$E_{pg} = mgy$ $W = -\Delta E_{pg}$
	ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA	$E_{pe} = \frac{1}{2} kS^2$ $W = -\Delta E_{pe}$
	ENERGÍA CINÉTICA	$E_c = \frac{1}{2} mV^2$ $W = \Delta E_c$
	ENERGÍA MECÁNICA	$E_M = E_p + E_c$
	CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA (si no hay fuerzas disipativas)	$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf}$
	CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA (si hay fuerzas disipativas como el rozamiento)	$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf} + W_{roz}$
	$W_{roz} = \mu_c N D = \text{energía perdida por rozamiento}$	

EJEMPLOS SOBRE ENERGÍA, SIN FUERZAS DISIPATIVAS

Ejemplo: Un bloque de masa $m = 10 \text{ kg}$ se encuentra en reposo en la parte superior de una rampa sin fricción de altura $h = 3,3 \text{ m}$ y base $b = 4,5 \text{ m}$. Determine con qué velocidad llega el bloque a la parte inferior de la rampa a partir de análisis de:

- Fuerzas
- Energías

a) Por análisis de fuerzas se hace el DCL del bloque:



$$\sum F_x = mg \sin \alpha = ma$$

$$\sum F_y = N - mg \cos \alpha = 0$$

Se tiene entonces que:

$$mg \sin \alpha = ma$$

$$g \sin \alpha = a$$

El ángulo α se obtiene a partir de las medidas de la rampa:

$$\alpha = \arctan \frac{h}{b} \approx 36,25^\circ$$

La distancia que recorre el bloque es la longitud de la rampa

$$D = \sqrt{h^2 + b^2} \approx 5,58 \text{ m}$$

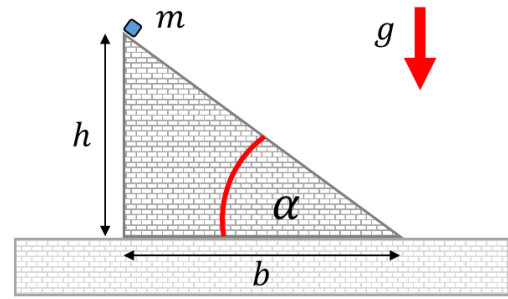
La velocidad con que el bloque llega a la parte inferior se puede calcular por cinemática como:

$$V^2 = V_i^2 + 2aD ; V_i = 0 ; a = g \sin \alpha$$

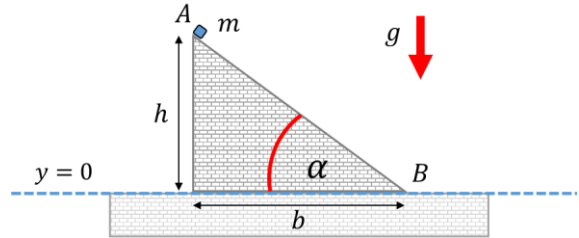
$$\Rightarrow V^2 = 2 g \sin \alpha D$$

$$V = \sqrt{2 * g * \sin \alpha * D}$$

$$V = \sqrt{2 * 9,81 * \sin 36,25^\circ * 5,58} \approx 8,0459 \text{ m/s}$$



b) Por energía:



Ya que no hay rozamiento, la energía mecánica inicial (en la parte superior de la rampa en el punto A) y la energía mecánica final (en la parte inferior de la rampa en el punto B) serán iguales:

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf}$$

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB}$$

Tomando como nivel de referencia para la altura y la energía potencial gravitacional, la parte inferior de la rampa

$$y_A = h ; y_B = 0 \Rightarrow E_{pB} = 0$$

El bloque se encuentra en reposo en el punto A, por lo tanto:

$$V_A = 0 \Rightarrow E_{cA} = 0$$

Entonces:

$$mgy_A + 0 = 0 + \frac{1}{2}mV_B^2$$

Por lo tanto:

$$mgh = \frac{1}{2}mV_B^2$$

$$V_B = \sqrt{2 * g * h}$$

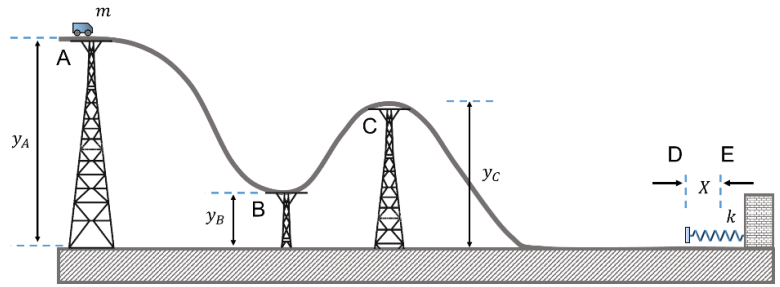
$$V_B = \sqrt{2 * 9,81 * 3,3} \approx 8,0465 \text{ m/s}$$

Por ambos métodos se debe obtener exactamente el mismo valor, pero debido al redondeo, las respuestas difieren por algunos decimales.

Ejemplo: En el diseño de una montaña rusa, se considera emplear un coche de masa 300 kg (con pasajeros) que se desplazará en la trayectoria dada por los rieles como se muestra en la figura y que pasa por los puntos A, B, C, D y E. Asuma que la fuerza de rozamiento es despreciable en todo el recorrido.

a) Calcule la rapidez con que el coche pasa por los puntos B, C y D.

b) Al final del trayecto, se ubica un resorte para detener al coche tras comprimirse una distancia $X = 2 \text{ m}$. Calcule de cuánto debe ser la constante de elasticidad del resorte.



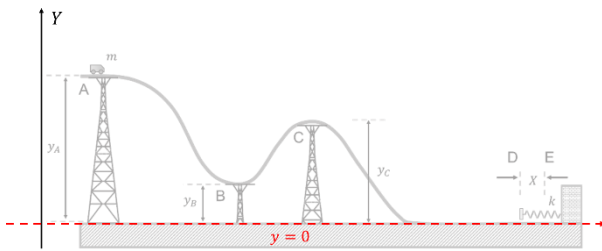
Las alturas que se muestran en la figura son $y_A = 9,2 \text{ m}$; $y_B = 2,3 \text{ m}$; $y_C = 6,7 \text{ m}$.

a) Aplicando el principio de conservación de la energía:

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf} + W_{roz}$$

Ya que no hay rozamiento: $W_{roz} = 0$

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf}$$



Se define el nivel de altura $y = 0$ en la parte inferior del trayecto.

Trayecto A $\mapsto$ B

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB}$$

$$mgy_A + 0 = mgy_B + \frac{1}{2}mV_B^2$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2g(y_A - y_B)}$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2 * 9,81 * (9,2 - 2,3)} \approx 11,6352 \text{ m/s}$$

Trayecto A $\mapsto$ C

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pC} + E_{cC}$$

$$mgy_A + 0 = mgy_C + \frac{1}{2}mV_C^2$$

$$\Rightarrow V_C = \sqrt{2g(y_A - y_C)}$$

$$\Rightarrow V_C = \sqrt{2 * 9,81 * (9,2 - 2,3)} \approx 7,0036 \text{ m/s}$$

Trayecto A $\mapsto$ D

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pD} + E_{cD}$$

$$mgy_A + 0 = 0 + \frac{1}{2}mV_D^2$$

$$\Rightarrow V_D = \sqrt{2gy_A}$$

$$\Rightarrow V_D = \sqrt{2 * 9,81 * 9,2} \approx 13,4352 \text{ m/s}$$

b) Trayecto A $\mapsto$ E

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pE} + E_{cE}$$

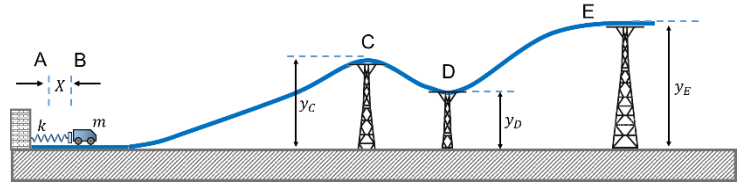
$$mgy_A + 0 = \frac{1}{2}kX^2 + 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{2mgy_A}{X^2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 * 300 * 9,81 * 9,2}{2^2} \approx 13537,8 \text{ N/m}$$

Ejemplo: Una atracción de un parque de diversiones, consiste de un carrito de 400 kg de masa total, que es lanzado desde la parte baja de un trayecto que pasa por los puntos A, B, C, D y E. Inicialmente, el carrito yace en reposo en una superficie horizontal y sostenido por un resorte de constante $k = 9000 \text{ N/m}$ comprimido una distancia X . Al ser liberado el mecanismo, el carrito sale lanzado en el punto B, donde el resorte ya se ha descomprimido. Asuma que no hay rozamiento en ningún punto de la trayectoria.

- a) Si el carrito debe llegar al punto E y quedar en reposo, ¿Cuánto se debe comprimir el resorte?
- b) Calcule la rapidez con que pasa el coche por los puntos B, C y D.



Las alturas que se muestran en la figura son $y_C = 4,5 \text{ m}$; $y_D = 2,9 \text{ m}$; $y_E = 6 \text{ m}$.

- a) Aplicando el principio de conservación de la energía:

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf} + W_{roz}$$

Ya que no hay rozamiento: $W_{roz} = 0$

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf}$$

Trayecto A $\mapsto$ E

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pE} + E_{cE}$$

$$\frac{1}{2}kX^2 + 0 = mgy_E + 0$$

$$\Rightarrow X = \sqrt{\frac{2mgy_E}{k}}$$

$$\Rightarrow X = \sqrt{\frac{2 * 400 * 9,81 * 6}{9000}} \approx 2,2873 \text{ m}$$

- b) Trayecto A $\mapsto$ B

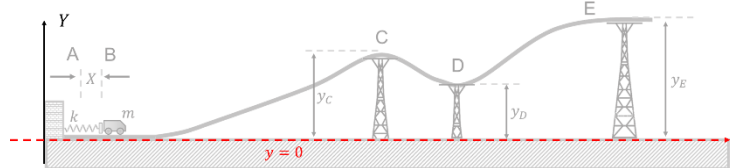
$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB}$$

$$\frac{1}{2}kX^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mV_B^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 = \frac{1}{2}kX^2$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{\frac{kX^2}{m}}$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{\frac{9000 * 2,2873^2}{400}} = 10,8496 \text{ m/s}$$



Se define el nivel de altura $y = 0$ en la parte inferior del trayecto.

Trayecto A $\mapsto$ C

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pC} + E_{cC}$$

$$\frac{1}{2}kX^2 + 0 = mgy_C + \frac{1}{2}mV_C^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_C^2 = \frac{1}{2}kX^2 - mgy_C$$

$$\Rightarrow V_C = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2}kX^2 - mgy_C \right)}$$

$$\Rightarrow V_C = \sqrt{\frac{2}{400} \left(\frac{1}{2} * 9000 * 2,2873^2 - 400 * 9,81 * 4,5 \right)}$$

$$\Rightarrow V_C = 5,4244 \text{ m/s}$$

Trayecto A $\mapsto$ D

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pD} + E_{cD}$$

$$\frac{1}{2}kX^2 + 0 = mgy_D + \frac{1}{2}mV_D^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_D^2 = \frac{1}{2}kX^2 - mgy_D$$

$$\Rightarrow V_D = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2}kX^2 - mgy_D \right)}$$

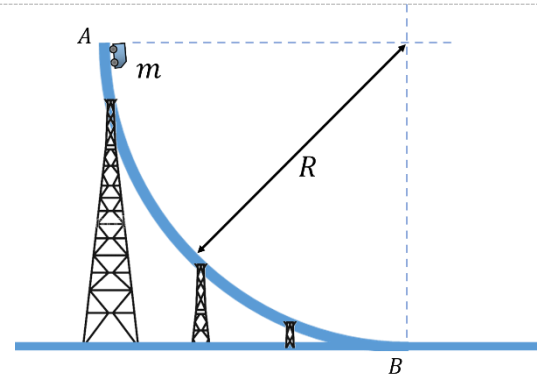
$$\Rightarrow V_D = \sqrt{\frac{2}{400} \left(\frac{1}{2} * 9000 * 2,2873^2 - 400 * 9,81 * 2,9 \right)}$$

$$\Rightarrow V_D = 7,7985 \text{ m/s}$$

Ejemplo: Una atracción mecánica consiste de un coche de 200 kg (con pasajeros) que desliza a lo largo de una pista que tiene forma de 1/4 de circunferencia cuyo radio es de 50 m.

a) Calcule el trabajo que realiza la fuerza de gravedad a lo largo de la trayectoria de A a B.

b) Si el coche parte del reposo en A, calcule con qué velocidad llega a B.



a)

$$W = -\Delta E_{pg} = -(E_{pgf} - E_{pgi}) = -(E_{pgB} - E_{pgA}) = E_{pgA} - E_{pgB}$$

$$\Rightarrow W = mgy_A - mgy_B$$

Tomando como nivel de referencia $y = 0$ la base de la pista, se tiene que la altura del punto A es el mismo radio R y la altura del punto B es cero. Entonces:

$$W = mgR$$

$$W = 200 * 9,81 * 50 = 98100 \text{ J}$$

b)

$$W = \Delta E_c = (E_{cf} - E_{ci}) = E_{cB} - E_{cA}$$

$$W = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2$$

Ya que el coche parte del reposo $V_A = 0$

$$W = \frac{1}{2}mV_B^2 \Rightarrow V_B = \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

$$V_B = \sqrt{\frac{2 * 98100}{200}} = 31,3209 \text{ m/s}$$

EJEMPLOS SOBRE ENERGÍA, CON FUERZAS DISIPATIVAS

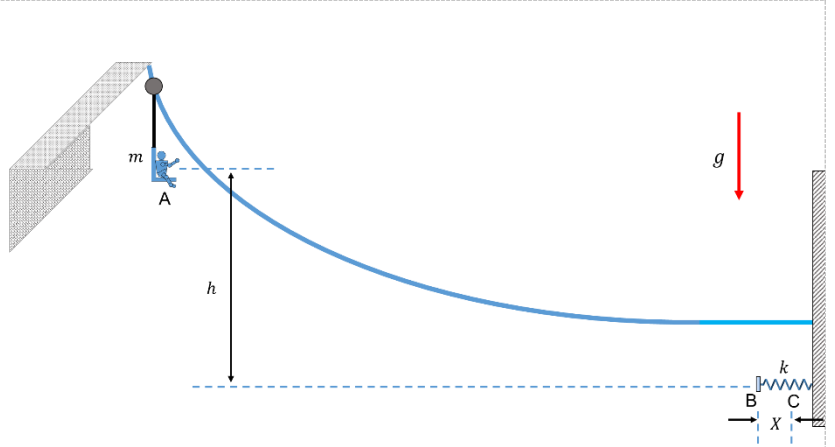
Ejemplo: Un cable vuelo consiste de una silla que, junto con el pasajero, tienen una masa total de 100 kg. La altura h desde la cual se libera es de 10 m y al final del recorrido se encuentra un mecanismo de frenado conformado por un resorte de constante $k = 1500 \text{ N/m}$ que detiene al conjunto silla-pasajero en el punto C tras comprimirse una distancia X .

Asumiendo que no hay fuerzas disipativas, calcule:

- La rapidez con que el conjunto silla – pasajero llega al punto B.
- La compresión X del resorte.

Ahora, teniendo en cuenta las fuerzas disipativas, tras un ensayo se encuentra que el conjunto silla – pasajero llega al punto B con una rapidez de 4 m/s.

- Calcule la energía perdida debido al trabajo de las fuerzas disipativas.
- Calcule la compresión del resorte.



a)

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB}$$

$$mgy_A + 0 = 0 + \frac{1}{2}mV_B^2$$

$$V_B = \sqrt{2mgy_A} = \sqrt{2 * 100 * 9,81 * 10} = 140,0714 \text{ m/s}$$

b)

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pC} + E_{cC}$$

$$mgy_A + 0 = \frac{1}{2}kX^2 + 0$$

$$X = \sqrt{\frac{2mgy_A}{k}} = \sqrt{\frac{2 * 100 * 9,81 * 10}{1500}} = 3,6166 \text{ m}$$

c)

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB} + \mathbb{W}_{NC}$$

El término $\mathbb{W}_{NC}$ incluye la energía perdida por trabajo de fuerzas disipativas como fricción con el cable, fuerza de arrastre con el aire, etc.

$$mgy_A + 0 = 0 + \frac{1}{2}mV_B^2 + \mathbb{W}_{NC}$$

$$\mathbb{W}_{NC} = mgy_A - \frac{1}{2}mV_B^2$$

$$\mathbb{W}_{NC} = 100 * 9,81 * 10 - \frac{1}{2} * 100 * 4^2$$

$$\mathbb{W}_{NC} = 9010 \text{ J}$$

d)

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pC} + E_{cC} + \mathbb{W}_{NC}$$

$$mgy_A + 0 = \frac{1}{2}kX^2 + 0 + 9010$$

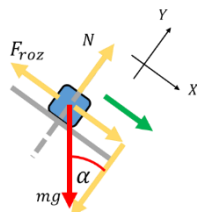
$$X = \sqrt{\frac{2(mgy_A - 9010)}{k}} = \sqrt{\frac{2 * (100 * 9,81 * 10 - 9010)}{1500}} = 1,0328 \text{ m}$$

EJEMPLOS SOBRE ENERGÍA, CON FUERZAS DISIPATIVAS (FUERZA DE ROZAMIENTO)

Ejemplo: Un bloque de masa $m = 10 \text{ kg}$ se encuentra en reposo en la parte superior de una rampa cuyo coeficiente de fricción dinámico es $\mu_c = 0,7$, de altura $h = 3,3 \text{ m}$ y base $b = 4,5 \text{ m}$. Determine con qué velocidad llega el bloque a la parte inferior de la rampa a partir de análisis de:

- Fuerzas
- Energías

a) Por análisis de fuerzas se hace el DCL del bloque:



$$\sum F_x = mgsen\alpha - \mu N = ma$$

$$\sum F_y = N - mgcos\alpha = 0$$

Se tiene entonces que:

$$mgsen\alpha - \mu_c N = ma$$

$$N = mgcos\alpha$$

$$mgsen\alpha - \mu_c mgcos\alpha = ma$$

$$gsen\alpha - \mu_c gcos\alpha = a$$

$$a = g(sen\alpha - \mu_c cos\alpha)$$

El ángulo α se obtiene a partir de las medidas de la rampa:

$$\alpha = \arctan \frac{h}{b} \approx 36,2538^\circ$$

La longitud de la rampa es

$$D = \sqrt{h^2 + b^2} \approx 5,5803 \text{ m}$$

La velocidad con que el bloque llega a la parte inferior se puede calcular por cinemática como:

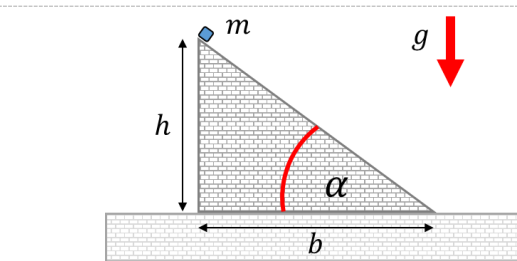
$$V^2 = V_i^2 + 2aD ; V_i = 0 ; a = g(sen\alpha - \mu_c cos\alpha)$$

$$\Rightarrow V^2 = 2 g(sen\alpha - \mu_c cos\alpha) D$$

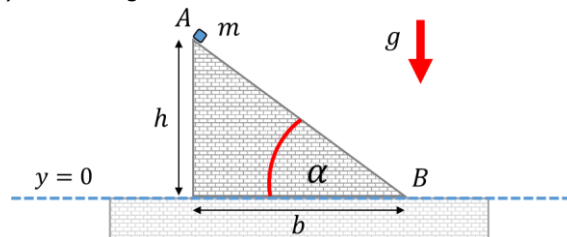
$$V = \sqrt{2 g(sen\alpha - \mu_c cos\alpha) D}$$

$$V = \sqrt{2 * 9,81 * (sen 36,2538^\circ - 0,7 * cos 36,2538^\circ) * 5,5803}$$

$$V \approx 1,7155 \text{ m/s}$$



b) Por energía:



Ya que hay rozamiento, la energía mecánica inicial (en la parte superior de la rampa en el punto A) será igual a la energía mecánica final (en la parte inferior de la rampa en el punto B) más la energía que se disipa por el rozamiento:

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf} + W_{roz}$$

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB} + W_{roz}$$

Tomando como nivel de referencia para la altura y la energía potencial gravitacional, la parte inferior de la rampa

$$y_A = h ; y_B = 0 \Rightarrow E_{pB} = 0$$

El bloque se encuentra en reposo en el punto A, por lo tanto:

$$V_A = 0 \Rightarrow E_{cA} = 0$$

Entonces:

$$mgy_A + 0 = 0 + \frac{1}{2}mV_B^2 + \mu_c N D$$

$$N = mgcos\alpha$$

Por lo tanto:

$$mgh = \frac{1}{2}mV_B^2 + \mu_c mgcos\alpha D$$

$$V_B = \sqrt{2g(h - \mu_c cos\alpha D)}$$

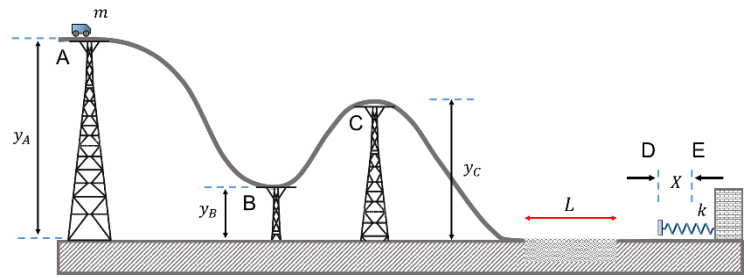
$$V_B = \sqrt{2 * 9,81 * (3,3 - 0,7 * cos 36,2538^\circ * 5,5803)}$$

$$V_B \approx 1,7155 \text{ m/s}$$

Ejemplo: En el diseño de una montaña rusa, se considera emplear un coche de masa 300 kg (con pasajeros) que se desplazará en la trayectoria dada por los rieles como se muestra en la figura y que pasa por los puntos A, B, C, D y E. Asuma que solo hay rozamiento en el tramo de longitud L a lo largo del cual el coche se desliza con un coeficiente de fricción cinético de $\mu_c = 0,9$.

a) Calcule la rapidez con que el coche pasa por los puntos B, C y D.

b) Al final del trayecto, se ubica un resorte para detener al coche tras comprimirse una distancia $X = 2\text{ m}$. Calcule de cuánto debe ser la constante de elasticidad del resorte.



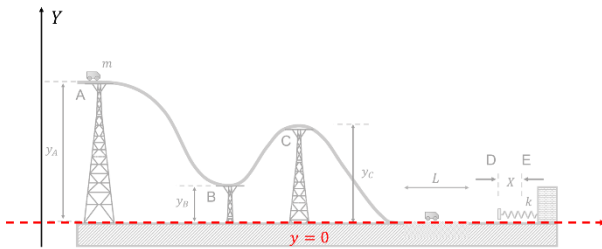
Las alturas que se muestran en la figura son $y_A = 9,2\text{ m}$; $y_B = 2,3\text{ m}$; $y_C = 6,7\text{ m}$. La longitud $L = 6\text{ m}$.

a) Aplicando el principio de conservación de la energía:

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf} + W_{roz}$$

Ya que no hay rozamiento de A a C: $W_{roz} = 0$

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf}$$



Se define el nivel de altura $y = 0$ en la parte inferior del trayecto.

Trayecto A $\rightarrow$ B

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pB} + E_{cB}$$

$$mgy_A + 0 = mgy_B + \frac{1}{2}mV_B^2$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2g(y_A - y_B)}$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2 * 9,81 * (9,2 - 2,3)} \approx 11,6352\text{ m/s}$$

Trayecto A $\rightarrow$ C

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pC} + E_{cC}$$

$$mgy_A + 0 = mgy_C + \frac{1}{2}mV_C^2$$

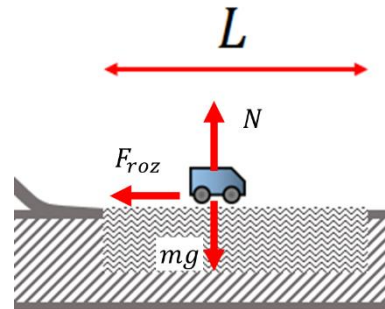
$$\Rightarrow V_C = \sqrt{2g(y_A - y_C)}$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2 * 9,81 * (9,2 - 2,3)} \approx 7,0036\text{ m/s}$$

Trayecto A $\rightarrow$ D, hay rozamiento, entonces:

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pD} + E_{cD} + W_{roz}$$

$$mgy_A + 0 = 0 + \frac{1}{2}mV_D^2 + \mu_c N L$$



Del DCL : $N = mg$

$$mgy_A + 0 = 0 + \frac{1}{2}mV_D^2 + \mu_c mg L$$

$$\Rightarrow V_D = \sqrt{2g(y_A - \mu_c L)}$$

$$\Rightarrow V_D = \sqrt{2 * 9,81 * (9,2 - 0,9 * 6)} \approx 8,63458\text{ m/s}$$

b) Trayecto A $\rightarrow$ E, hay rozamiento, entonces:

$$E_{pA} + E_{cA} = E_{pE} + E_{cE} + W_{roz}$$

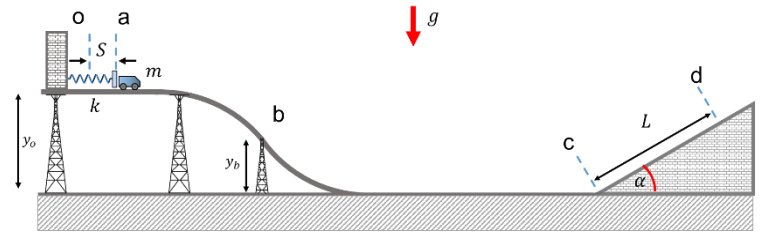
$$mgy_A + 0 = \frac{1}{2}kX^2 + \mu_c mg L$$

$$\Rightarrow k = \frac{2mg(y_A - \mu_c L)}{X^2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 * 300 * 9,81 * (9,2 - 0,9 * 6)}{2^2} \approx 5591,7\text{ N/m}$$

Ejemplo: En un parque de diversiones, se dispone de un mecanismo de impulso para un coche de 400 kg de masa total. Inicialmente el coche se encuentra en reposo y comprimiendo el resorte de constante $k = 4000 \text{ N/m}$ una distancia S en la posición o. Luego al liberar el resorte, el coche sale lanzado en a y recorre la pista pasando por los puntos b, c y d. La pista no presenta rozamiento excepto en el tramo cd del plano inclinado un ángulo $\alpha = 30^\circ$. El coeficiente de rozamiento dinámico en este tramo es de $\mu_c = 0,9$.

- Calcule, de cuánto debe ser la compresión del resorte, tal que el bloque logre recorrer una distancia $L = 5 \text{ m}$ a lo largo del plano inclinado hasta detenerse en d.
- Calcule la velocidad del coche en los puntos a, b y c.
- Calcule la velocidad del coche en el punto c' ubicado en la mitad del tramo cd tras haber recorrido la mitad de la distancia L a lo largo del plano inclinado.



Las medidas en la figura son:

$$y_o = 4 \text{ m} , \quad y_b = 2,5 \text{ m} ; \quad L = 5 \text{ m}$$

a) Trayecto o $\rightarrow$ d:

Aplicando el principio de conservación de la energía:

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf} + W_{roz}$$

Ya que hay rozamiento de o a d: $W_{roz} = \mu_c N D$

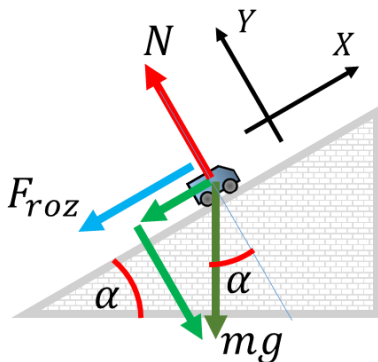
$$E_{po} + E_{co} = E_{pd} + E_{cd} + \mu_c N D$$

En este caso la distancia recorrida es $D = L$.

Se define el nivel de altura $y = 0$ en la parte inferior del trayecto. El coche parte del reposo en o, y tiene energía potencial, tanto gravitacional como elástica. En el punto d el coche ya queda en reposo y por lo tanto su energía cinética es nula en ese punto, entonces:

$$mgy_o + \frac{1}{2}kS^2 + 0 = mgy_d + \mu_c N L$$

La fuerza normal se obtiene mediante análisis de fuerzas:



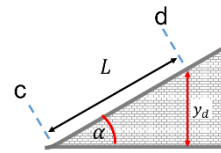
$$N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$$

$$mgy_o + \frac{1}{2}kS^2 = mgy_d + \mu_c mg \cos \alpha L$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{2}{k}(mgy_d + \mu_c mg \cos \alpha L - mgy_o)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{2m}{k}(\mu_c g \cos \alpha L + g(y_d - y_o))}$$

La altura del punto d se obtiene como:



$$y_d = L \sin \alpha = 5 \sin 30^\circ = 2,5 \text{ m}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{2 \cdot 400}{4000}(0,9 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 + 9,81 \cdot (2,5 - 4))}$$

$$\Rightarrow S = 2,1686 \text{ m}$$

b)

Trayecto o $\rightarrow$ a:

$$mgy_o + \frac{1}{2}kS^2 = mgy_a + \frac{1}{2}mV_a^2$$

$$V_a = \sqrt{\frac{2}{m}(mgy_o + \frac{1}{2}kS^2 - mgy_a)} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kS^2 + mg(y_o - y_a)\right)}$$

Pero $y_o = y_a = 4 \text{ m}$

$$V_a = \sqrt{\frac{2}{400}\left(\frac{1}{2} \cdot 4000 \cdot 2,1686^2 + 400 \cdot 9,81 \cdot (4 - 4)\right)}$$

$$V_a = 6,8577 \text{ m/s}$$

Trayecto o $\rightarrow$ b:

$$mgy_o + \frac{1}{2}kS^2 = mgy_b + \frac{1}{2}mV_b^2$$

$$V_b = \sqrt{\frac{2}{m} \left(mgy_o + \frac{1}{2}kS^2 - mgy_b \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2}kS^2 + mg(y_o - y_b) \right)}$$

$$V_a = \sqrt{\frac{2}{400} \left(\frac{1}{2} * 4000 * 2,1686^2 + 400 * 9,81 * (4 - 2,5) \right)}$$

$$V_a = 8,7440 \text{ m/s}$$

Trayecto o $\rightarrow$ c:

$$mgy_o + \frac{1}{2}kS^2 = 0 + \frac{1}{2}mV_c^2$$

$$V_c = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2}kS^2 + mgy_o \right)}$$

$$V_c = \sqrt{\frac{2}{400} \left(\frac{1}{2} * 4000 * 2,1686^2 + 400 * 9,81 * 4 \right)}$$

$$V_c = 11,2030 \text{ m/s}$$

c) Desde o hasta el punto c' en la mitad entre c y d:

$$E_{po} + E_{co} = E_{pc'} + E_{cc'} + \mu_c N (L/2)$$

$$mgy_o + \frac{1}{2}kS^2 + 0 = mgy_{c'} + \frac{1}{2}mV_{c'}^2 + \mu_c N \left(\frac{L}{2} \right); y_{c'} = (L/2)\text{sen}(30^\circ) = 1,25 \text{ m}$$

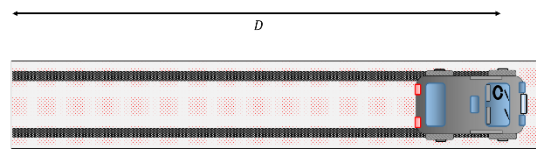
$$mgy_o + \frac{1}{2}kS^2 = mgy_{c'} + \frac{1}{2}mV_{c'}^2 + \mu_c N \left(\frac{L}{2} \right); N = mg\cos\alpha$$

$$V_{c'} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(mgy_o + \frac{1}{2}kS^2 - mgy_{c'} - \mu_c mg\cos\alpha \left(\frac{L}{2} \right) \right)}$$

$$V_{c'} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2}kS^2 + mg(y_o - y_{c'}) - \mu_c mg\cos\alpha \left(\frac{L}{2} \right) \right)}$$

$$V_{c'} = \sqrt{\frac{2}{400} \left(\frac{1}{2} * 4000 * 2,1686^2 + 400 * 9,81(4 - 1,25) - 0,9 * 400 * 9,81 * \cos 30^\circ * 2,5 \right)} \Rightarrow V_{c'} = 7,9216 \text{ m/s}$$

Ejemplo: En ciertas autopistas, se anexa un carril de emergencia a un lado de la vía principal, para que los vehículos que presenten fallas en los frenos ingresen a este y derrapen hasta detenerse. Determine la longitud que debe tener un carril de emergencia plano y horizontal para que un vehículo de 5 toneladas que viaja a 100 km/h se detenga, si entre el vehículo y la vía hay un coeficiente de rozamiento cinético de 0,9.



$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf} + \mathbb{W}_{roz}$$

$$0 + E_{ci} = 0 + 0 + \mathbb{W}_{roz}$$

$$\frac{1}{2}mV_i^2 = \mu_c ND$$

$$\frac{1}{2\mu_c N} mV_i^2 = D, N = mg; 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 27,7778 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$D = \frac{1}{2\mu_c mg} mV_i^2 \Rightarrow D = \frac{1}{2\mu_c g} V_i^2$$

$$D = \frac{1}{2 * 0,9 * 9,81} 27,7778^2 = 43,69 \text{ m}$$

POTENCIA

La potencia es una cantidad física que cuantifica la cantidad de trabajo que realiza una fuerza por cantidad de tiempo.

Se define la potencia media como

$$\mathcal{P}_m = \frac{W}{\Delta t}$$

Y la potencia instantánea como

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

El diferencial de trabajo es $dW = F \cos \theta \, dr$ y entonces:

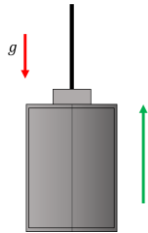
$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cos \theta \, dr}{dt} = F \cos \theta \frac{dr}{dt} ; \frac{dr}{dt} = V$$

$$\mathcal{P} = FV \cos \theta$$

Donde θ es el ángulo entre el vector fuerza y el vector velocidad.

Las unidades de potencia en el sistema internacional son los J/s que se le ha dado el nombre de watts o vatios y su símbolo es $[W]$. No confundir la W de trabajo con la W de las unidades de potencia.

Ejemplo: Calcule la potencia de la fuerza de gravedad en la caída de una bola de acero de 50 kg desde una altura de 20 m sobre el suelo.	
El trabajo es: $W = -\Delta E_{pg} = E_{pgi} - E_{pgf} = mgy_i - mgy_f$ Entonces: $\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{mgy_i - mgy_f}{\Delta t} = mg \frac{y_i - y_f}{\Delta t}$ El tiempo que dura la caída se puede obtener de cinemática: $y = y_i - \frac{1}{2}g(t - t_i)^2 = y_i - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$	En el suelo: $y = 0$ $0 = y_i - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2y_i}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 20}{9,81}} = 2.01928 \, s$ $\mathcal{P} = mg \frac{y_i - y_f}{\Delta t}$ $\mathcal{P} = 50 * 9,81 * \frac{20 - 0}{2.01928} = 4858,16 [W] = 4,85816 [kW]$

Ejemplo: Un ascensor de 800 kg (masa total con pasajeros) se eleva mediante un cable a velocidad constante de 3 m/s. Calcule la potencia que debe desarrollar el motor que eleva al ascensor.	
Ya que la velocidad es constante, la aceleración es cero. La tensión se determina como: $\sum F_y = T - mg = 0 \Rightarrow T = mg$	 $\mathcal{P} = FV \cos \theta$ Ya que $F = T = mg$ y la velocidad V son paralelas, entonces $\theta = 0^\circ$ $\mathcal{P} = mgV \cos 0^\circ$ $\mathcal{P} = 800 * 9,81 * 3 = 23544 [W]$

5. COLISIONES

Una colisión consiste de un intercambio de energía y cantidad de movimiento. Un ejemplo típico es el choque entre dos cuerpos, los cuales inicialmente se mueven de tal manera que sus trayectorias se cruzan y entran en contacto entre sí de una manera abrupta, como por ejemplo el choque de dos bolas de billar. El concepto de colisión sin embargo en un poco más general, ya que al tratar con las colisiones entre partículas subatómicas estas se aproximan e intercambian energía y cantidad de movimiento sin llegar a tener contacto entre sí, como sucede por ejemplo en los colisionadores de partículas.

Choques en una dimensión.

Consideremos ahora los choques que se dan cuando dos objetos se mueven a lo largo de una misma línea recta.

En un choque, se tienen dos cuerpos de masas m_1 y m_2 que inicialmente se mueven con velocidades V_1 y V_2 y después del choque quedan con velocidades V_1' y V_2' .

La cantidad de movimiento antes del choque para cada cuerpo es:

$$P_{1i} = m_1 V_1 ; \quad P_{2i} = m_2 V_2$$

La energía cinética antes del choque para cada cuerpo es:

$$E_{c1i} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 ; \quad E_{c2i} = \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

La cantidad de movimiento total inicial es, entonces:

$$P_{i \text{ Total}} = P_{1i} + P_{2i} = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

La energía cinética total inicial es, entonces:

$$E_{ci \text{ Total}} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

La cantidad de movimiento después del choque para cada cuerpo es:

$$P_{1f} = m_1 V_1' ; \quad P_{2f} = m_2 V_2'$$

La energía cinética después del choque para cada cuerpo es:

$$E_{c1f} = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 ; \quad E_{c2f} = \frac{1}{2} m_2 V_2'^2$$

La cantidad de movimiento total final es, entonces:

$$P_{f \text{ Total}} = P_{1f} + P_{2f} = m_1 V_1' + m_2 V_2'$$

La energía cinética total final es, entonces:

$$E_{cf \text{ Total}} = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2$$

Si el sistema de cuerpos que interactúan es cerrado, o sea, las fuerzas externas son nulas, se cumple que la cantidad de movimiento se conserva:

$$P_{i \text{ Total}} = P_{f \text{ Total}}$$

Dependiendo de si se conserva o no la energía cinética, las colisiones se clasifican como perfectamente elásticas y perfectamente inelásticas.

COLISIONES PERFECTAMENTE ELÁSTICAS

En este caso:

$$P_{i\ Total} = P_{f\ Total}$$

Dos objetos se mueven a lo largo de la misma dirección y chocan. Los objetos quedan separados después del choque.

Por lo tanto:

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2'$$

COLISIONES PERFECTAMENTE INELÁSTICAS

En este caso:

$$P_{i\ Total} = P_{f\ Total}$$

Dos objetos se mueven a lo largo de la misma dirección y chocan. Los objetos quedan unidos después del choque, entonces

$$V_1' = V_2' = V'$$

Por lo tanto:

$$m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)V'$$

Para clasificar las colisiones, se define el coeficiente de restitución e como:

$$e = -\frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1}$$

Este coeficiente toma valores entre 0 y 1, es decir $0 \leq e \leq 1$. Se cumple que $e = 1$ cuando la colisión es perfectamente elástica y $e = 0$ si la colisión es perfectamente inelástica. Para valores intermedios $0 < e < 1$ las colisiones se clasifican como semielásticas.

EXPLOSIÓN

En este caso:

$$P_{i\ Total} = P_{f\ Total}$$

Un objeto de masa inicial M con velocidad V se fragmenta en N objetos de masas $m_1, m_2, \dots, m_N$ que salen despedidos y se mueven con velocidades $V_1', V_2', \dots, V_N'$ después del choque.

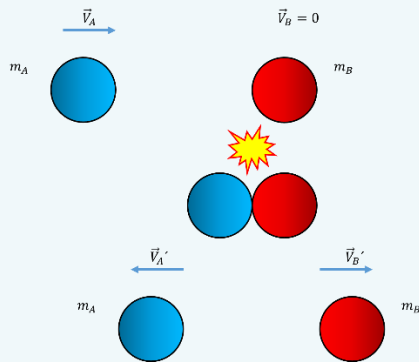
Por lo tanto:

$$MV = m_1V_1' + m_2V_2' + \dots + m_NV_N'$$

En el caso de un mecanismo de disparo tal como un cañón, se observa que al ser disparada la bala el arma se mueve en sentido opuesto. Esto se denomina velocidad de retroceso. Si el conjunto está inicialmente en reposo, se tiene que:

$$0 = m_1V_1' + m_2V_2' \Rightarrow V' = -\frac{m_2V_2'}{m_1}$$

Ejemplo: Una esfera maciza (A) de 2 kg choca a 3 m/s frontalmente con otra esfera maciza (B) de 5 kg en reposo, como se muestra en la figura. Si después del choque las dos esferas quedan separadas y la esfera (B) se mueve a 1 m/s, determine a qué velocidad queda moviéndose la esfera (A) después del choque.



En este caso, se tiene una colisión perfectamente elástica:

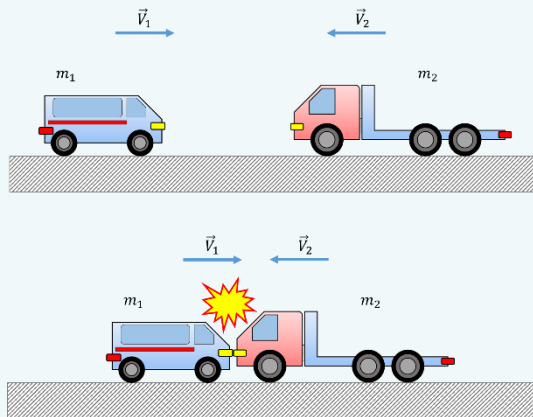
$$m_A V_A + m_B V_B = m_A V_A' + m_B V_B'$$

$$m_A V_A = m_A V_A' + m_B V_B'$$

$$V_A' = \frac{m_A V_A - m_B V_B'}{m_A} = \frac{2 * 3 - 5 * 1}{2} = 0,5 \text{ m/s}$$

Ejemplo: Dos vehículos se mueven en una autopista rectilínea y en sentidos opuestos. El vehículo (A) de masa 4000 kg se mueve a 3 m/s y el vehículo (B) de 6000 kg se mueve a 1 m/s, como se muestra en la figura. Si los vehículos chocan y quedan unidos,

- Determine la velocidad con que se mueve el conjunto después de la colisión.
- Calcule la energía cinética total antes y después de la colisión. ¿Se conserva?



En este caso, se tiene una colisión perfectamente inelástica:

a)

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V'$$

$$V' = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

$$V' = \frac{4000 * 3 + 6000 * (-1)}{4000 + 6000} = 0,6 \text{ m/s}$$

b)

$$E_{ci \text{ Total}} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

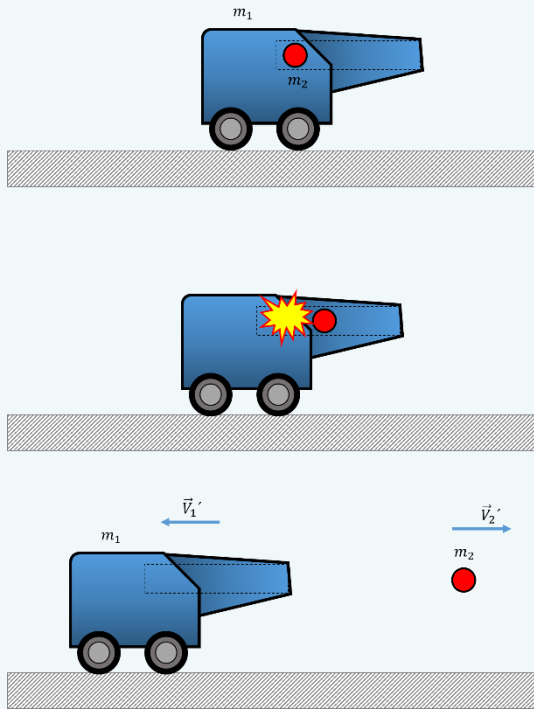
$$E_{ci \text{ Total}} = \frac{1}{2} * 4000 * 3^2 + \frac{1}{2} * 6000 * (-1)^2 = 21000 \text{ J}$$

$$E_{cf \text{ Total}} = \frac{1}{2} m_1 V'^2 + \frac{1}{2} m_2 V'^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V'^2$$

$$E_{cf \text{ Total}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V'^2 = \frac{1}{2} (4000 + 6000) * 0,6^2 = 1800 \text{ J}$$

Ya que la energía después de la colisión es menor que antes de la colisión, se tiene que la energía no se conserva.

Ejemplo: Un cañón cuya masa es de 300 kg se encuentra en reposo junto con una bala de 10 kg en su interior. Al realizar el disparo, la bala sale con una velocidad de 50 m/s. ¿Con qué velocidad se mueve el cañón?



Este caso sería una explosión

$$MV = m_1 V_1' + m_2 V_2'$$

La masa total es la suma de la masa del cañón con la masa de la bala y la velocidad inicial es cero ya que el conjunto inicialmente estaba en reposo:

$$0 = m_1 V_1' + m_2 V_2'$$

La velocidad del cañón es entonces:

$$V' = -\frac{m_2 V_2'}{m_1} = -\frac{10 * 50}{300} = -1,666 \text{ m/s}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR

Es un caso particular del movimiento curvilíneo.

El objeto describe una trayectoria a lo largo de una circunferencia, manteniendo constante la distancia a un centro de giro.

	Posición: [m]	$\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{R}$ $\vec{R} = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}$ $\vec{r}_c = x_c \hat{i} + y_c \hat{j}$ $\vec{r} = x_c \hat{i} + y_c \hat{j} + R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}$ $\vec{r} = (x_c + R \cos \theta) \hat{i} + (y_c + R \sin \theta) \hat{j}$
	Velocidad: [m/s]	Velocidad instantánea: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{V} = \frac{d}{dt} ((x_c + R \cos \theta) \hat{i} + (y_c + R \sin \theta) \hat{j})$ $\vec{V} = -R \sin \theta * \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + R \cos \theta * \frac{d\theta}{dt} \hat{j} = R \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})$ $\vec{V} = R \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})$ Se define la rapidez angular ω como $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ Rapidez: Magnitud de la velocidad. $ \vec{V} = V = R\omega$ La longitud de arco recorrida dS subtendida en un ángulo $d\theta$ es $dS = R d\theta$ y la velocidad será entonces $V = \frac{dS}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$.
	Aceleración: [m/s²]	Aceleración instantánea: $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ $\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(R \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \right)$ $\vec{a} = R \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \right)$ $\vec{a} = R \frac{d^2\theta}{dt^2} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) + R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j})$ $\hat{u}_T = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$ $\hat{u}_C = -\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}$ $\vec{a} = R \alpha \hat{u}_T + R \omega^2 \hat{u}_C$ $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$

		Se define la aceleración angular α como $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ Se define la aceleración tangencial a_T como $a_T = R \frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$ Se define la aceleración centrípeta a_c como $a_c = R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = R\omega^2 = \frac{V^2}{R}$ Magnitud de la aceleración. $ \vec{a} = a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2}$
--	--	--

Para que el objeto se mantenga en movimiento circular, se requiere que la fuerza neta provoque una componente de aceleración que sea centrípeta.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_T + \vec{a}_c) \Rightarrow \begin{cases} \sum F_T = ma_T \\ \sum F_c = ma_c \end{cases}$$

Donde $\sum F_T$ es la sumatoria de fuerzas en dirección tangencial y $\sum F_c$ es la sumatoria de fuerzas en dirección centrípeta o radial.

Teniendo en cuenta que $a_c = \frac{v^2}{R}$ entonces:

$$\sum F_c = m \frac{V^2}{R}$$

En el caso especial de movimiento circular uniforme (MCU), la velocidad angular es constante y por ende la aceleración angular y la aceleración tangencial son cero.

$$\begin{aligned} \sum F_T &= 0 \\ \sum F_c &= m \frac{V^2}{R} \end{aligned}$$

Adicionalmente la posición angular se obtiene mediante integración:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_i}^{\theta} d\theta = \int_{t_i}^t \omega dt \Rightarrow \theta - \theta_i = \omega (t - t_i) \Rightarrow \theta = \theta_i + \omega (t - t_i)$$

Si un objeto en MCU realiza una cantidad n de vueltas en un tiempo t , se definen la frecuencia f y el periodo τ como

$$f = \frac{n}{t} ; \tau = \frac{t}{n}$$

INTERACCIÓN GRAVITACIONAL

Desde la antigüedad, los ciclos del día y de la noche por el cambio de posición del Sol, las fases de la Luna y el desplazamiento sutil de los planetas en el cielo nocturno, fueron fenómenos que llamaron la atención del ser humano, el cual buscó darle alguna explicación. Estos intentos de comprender tales movimientos condujeron a diversos modelos.

En un comienzo, surgieron los modelos geocéntricos, en los cuales la Tierra se encuentra en el centro respecto al cual giran los demás cuerpos. Este modelo permitía explicar ciertas observaciones, pero eventualmente resultó ser poco práctico para explicar algunos movimientos, por ejemplo, por qué algunos planetas presentan un movimiento retrogrado.

Estas inconsistencias fueron corregidas al considerar que la Tierra no se encuentra en el centro respecto al cual orbitan los cuerpos celestes sino el Sol. Esto es el modelo heliocéntrico. Inicialmente se consideró que las orbitas tanto de la Tierra como de los demás planetas eran circunferencias con centro en el Sol, pero luego se modificaron a elipses en las cuales el Sol se ubica en uno de sus focos.

La interacción con que se atraen los objetos, es debida a una propiedad que estos poseen, llamada masa. Entre mayor masa posean, con mayor intensidad se atraerán.

Esta interacción depende de la distancia que separa a los objetos. Entre mayor sea la distancia, con menor intensidad se atraerán.

Cuantificando esta interacción en términos de la fuerza, se tiene

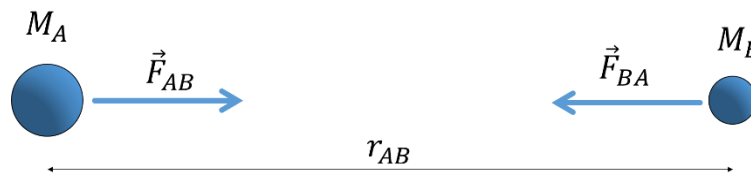


Diagrama que ilustra la interacción gravitacional entre dos masas, M_A y M_B , separadas por una distancia r_{AB} . Se muestran las fuerzas de atracción $\vec{F}_{AB}$ y $\vec{F}_{BA}$ dirigidas mutuamente. La ecuación que describe esta interacción es:

$$\vec{F}_{AB} = G \frac{M_A M_B}{r_{AB}^2} \hat{r}_{AB}$$